

## Årgång 19, 1936

### Första häftet

- 809.** I en storcirkel på ett klot med radien  $R$  är inskriven en triangel, vars inskrivna cirkel har radien  $r$ . Beräkna radien i det klot, som tangerar triangelns tre sidor och det ursprungliga klotet. (X.)
- 810.** Vilka värden kan en teradig symmetrisk determinant antaga, vars alla tvåradiga huvudminorer äro = 0, och vars huvudelement äro  $a$ ,  $b$  och  $c$  resp.?  $a$ ,  $b$  och  $c$  äro givna, positiva tal. (Stig Comét.)
- 811.** Ellipsen  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  och cirkeln  $x^2 + y^2 = r^2$  äro givna. Bestäm maxima och minima av längden hos den inom ellipsen belägna delen av en rörlig tangent till cirkeln ( $a > b > r$ ). (Stig Comét.)

### Enklare matematiska uppgifter

- 812.** Lös ekvationssystemet  $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$ ;  $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = 2(x + y)$ .  
(Svar:  $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ;  $y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (båda pos. eller båda neg.))
- 813.** Visa, att uttrycket  $\tan 9^\circ + \cot 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ$  är ett rationellt tal och bestäm detta.  
(Svar: 4)
- 814.** I triangeln  $ABC$  inskrives en cirkel, som tangerar  $BC$  i  $P$ . Bestäm triangelns vinklar, om  $PA = 16$  cm,  $PB = 15$  cm och  $PC = 10$  cm.  
(Svar:  $43,80^\circ$ ;  $62,18^\circ$ ;  $74,02^\circ$ )
- 815.** I triangeln  $ABC$  inskrives en cirkel, som tangerar  $BC$  i  $P$ . Vinklarna  $BAP$  och  $CAP$  äro resp.  $37^\circ$  och  $41^\circ$ . Beräkna vinkeln  $B$ .  
(Svar:  $56,18^\circ$ )
- 816.** I triangeln  $ABC$  är  $\frac{2}{\cos A} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ . Visa att  $B - C = \pm 90^\circ$ .
- 817.** En rät vinkels ena ben lutar  $30^\circ$  mot horisontalplanet, det andra  $45^\circ$ . Hur mycket lutar vinkelns plan mot horisontalplanet?  
(Svar:  $60^\circ$ )
- 818.** Visa, att summan av kvadraterna på (de fyra) diagonalerna i en parallelepiped är lika med summan av kvadraterna på (de tolv) kantlinjerna.
- 819.** I en parallellt stympad rotationskon är basradierna 1 och 2 cm samt höjden 2 cm. Konen vilar med den större basytan på ett

vågrätt plan och belyses av solen, som befinner sig  $45^\circ$  över horisonten. Hur många  $\text{cm}^2$  av manteln belyses, och hur stor är skuggan på horisontalplanet?

(Svar:  $\pi\sqrt{20} = 14,76 \text{ cm}^2$  och  $\sqrt{27} - \pi = 2,054 \text{ cm}^2$ )

- 820.** En tresidig pyramid har fem kantlinjer av längden  $a$  vardera, den sjätte har längden  $b$ . Beräkna volymen.

(Svar:  $\frac{ab}{12}\sqrt{3a^2 - b^2}$ )

- 821.** En cylinder med basradien 3 cm och höjden 1 cm är inskriven i ett klotsegment. Bestäm minimivärdet av segmentets buktiga yta.

(Svar:  $\frac{75\pi}{4} = 58,91 \text{ cm}^2$ )

- 822.** Ett halvklot med 1 cm radie och en sfärisk sektor ha samma volym och samma totala yta. Beräkna radien i den sfär, varav sektorn är en del.

(Svar: 2,5 cm)

- 823.** Ett parallelltrapets har sina hörn i  $(-6; -1)$ ;  $(2; -1)$ ;  $(3; 1)$  och  $(-1; 1)$ . Sök ekvationen för den räta linje genom  $(4; 5)$  som halverar det givna trapetsets yta.

(Svar:  $10x + 5 = 9y$ )

- 824.** Triangeln  $OAB$  har ett hörn i origo  $O$ . Ekvationerna för mittpunktsnormalerna till  $OA$  och  $OB$  äro resp.  $3x + y = 10$  och  $6x + 8y = -25$ . Angiv ekvationen för mittpunktsnormalen till  $AB$ .

(Svar:  $6x + 4y = 5$ )

- 825.** I vilken punkt på kurvan  $y = x^2 + x + 4$  är subtangenten 2 enheter?

(Svar:  $(1; 6)$ ;  $(2; 10)$ ;  $(-2; 6)$  samt  $(-3; 10)$ )

- 826.** Om  $x$  och  $y$  väljas så, att de positiva talen  $2x + y + 1$ ;  $x - 2y - 1$  och  $2 - x - y$  utgöra sidolängderna i en triangel, så ligger denna triangels omkrets mellan 3,5 och 14.

## Andra häftet

- 827.** Cosinerna för vinklarna i en triangel förhålla sig som  $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ . Bestäm vinklarna. (X.)

- 828.** Sök orten för inflexionspunkterna på kurvan  $y^2(1 + ax^2) = 1 + x^2$ , då  $a$  varierar. (X.)

- 829.** Till hyperbeln  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  drages en diameter med vinkelkoefficienten  $k$  ( $|k| < \frac{b}{a}$ ) samt dennas konjugatdiameter. Genom de fyra punkter, där de skära hyperbeln och dess konjugathyperbel, lägges en sådan andragradskurva, att de dragna räta linjerna bli

konjugatdiametrar även till denna. Kurvans ekvation?

(Stig Comét.)

## Enklare matematiska uppgifter

- 830.** I en aritmetisk serie är  $s_{10} = 1010$  och  $s_{100} = 100\,100$ . Bestäm  $s_{100}$ .  
(Svar: 10001000)
- 831.** I talföljden 3; 1; 2; 1,5; 1,75;... är varje tal från och med det tredje aritmetiska mediet till de två närmast föregående. Bestäm det gränsvärde, till vilket termerna närma sig.  
(Svar:  $1\frac{2}{3}$ )
- 832.** Lös ekvationen  $\tan x \cdot \tan 3x + 1 = \cos 2x$ .  
(Svar:  $n \cdot 180^\circ; 45^\circ + n \cdot 90^\circ$ )
- 833.** Lös ekvationen  $\sin 3x \cos^3 x + \sin^3 x \cos 3x = 0,75$ .  
(Svar:  $22,5^\circ + n \cdot 90^\circ$ )
- 834.** I ett parallelltrapets med de parallella sidorna 2 cm och 3 cm och höjden 5 cm dragas de båda diagonalerna. Beräkna ytorna av de fyra deltriangelarna var för sig.  
(Svar:  $2\text{ cm}^2; 3\text{ cm}^2; 3\text{ cm}^2$  och  $4,5\text{ cm}^2$ )
- 835.** Sidorna i en triangel äro 4 cm, 5 cm och 7 cm. Beräkna avståndet mellan den inskrivna cirkelns medelpunkt och medelpunkten i den vid minsta sidan vidskrivna cirkeln.  
(Svar:  $\sqrt{17,5}$ )
- 836.** I en cirkel med 35 cm diameter drages en 21 cm lång korda. Genom ena ändpunkten  $A$  drages en tangent till cirkeln och genom den andra  $B$  en diameter, vars förlängning skär tangenten i  $C$ . Beräkna stycket  $AC$ .  
(Svar: 60 cm)
- 837.** I triangeln  $ABC$  dragas bissektriserna till vinklarna  $B$  och  $C$ . De råka motstående sidor i  $B_1$  och  $C_1$  samt varandra i  $O$ . Beräkna vinkeln  $A$ , då  $AB_1 \cdot AC_1 = \overline{AO}^2$ .  
(Svar:  $90^\circ$ )
- 838.** Triangeln  $ABC$  har hörnet  $A$  i punkten  $(2; 3)$ . Bissektriserna till  $B$  och  $C$  utgöras av linjerna  $y = -x$  och  $y = 0$  resp. Bestäm koordinaterna för  $B$  och  $C$ .  
(Svar: För  $B$  äro de  $(3\frac{1}{4}; -3\frac{1}{4})$ ; för  $C$   $(-13; 0)$ )
- 839.** Beräkna vinkeln mellan två plan genom samma hörn i en tetraeder, vilka dela två kantlinjer mitt itu.  
(Svar:  $62,97^\circ$ )

- 840.** En snickare ville av en rektangulär träskiva tillverka åtta stycken sinsemellan lika rektanglar, längre än den ursprungliga. Om han gjorde dem 12 dm smalare än den ursprungliga skivan, felades det honom  $78 \text{ dm}^2$ ; om han försökte göra dem ännu 1 dm både smalare och kortare, fick han  $74 \text{ dm}^2$  över. Bestäm den ursprungliga skivans mått, om de förutsättes vara hela tal.  
(Svar: 14 och 15 dm)
- 841.** Två tresiffriga hela tal ge vid division med varandra 5 till kvot. Om den andra siffran i det ena och tredje siffran i det andra talet strykes, blir kvoten också 5. Vilka äro de möjliga hela talen om a) alla siffror äro olika b) båda talen äro delbara med 9 och summan av alla sex siffrorna 27?  
(Svar: a) 685 och 137; 865 och 173; 640 och 128; 730 och 146; 820 och 164; 920 och 184; 930 och 186; b) 585 och 117; 675 och 135; 765 och 153; 855 och 171)
- 842.** Ett firsiffrigt tal är 1269 enheter mindre än det tal, som skrives med samma siffror i omvänd ordning. Summan av kvadraterna på de tal, som bildas av de två yttersta, resp. de båda mellersta siffrorna i ursprunglig ordning är 300 enheter större än summan av kvadraterna på de tal, som bildas av varannan siffra. Bestäm talet, om det är delbart med 7.  
(Svar: 2583)
- 843.** En gosse hade ordnat sina stenkulor i tre högar. De två första högarna innehålla tillsammans 7 kulor a) mer b) mindre än den tredje. Sedan han flyttat över från den andra till den tredje högen lika många kulor som den första högen innehåller, befinner det att dubbla kvadraten på den andra högens antal överskjuter produkten av första och tredje högens antal med 293. Hur många kulor fanns det från början i varje hög?  
(Svar: a) Antalen äro i ordning 3, 16, och 12 eller 65, 162 och 220; b) Antalen äro i ordning 51, 130 och 188 eller 577, 1444 och 2028)
- 844.** Personalen på fyra olika kontor, tillsammans 30 personer, gjorde en insamling. Var och en på de tre första kontoren lämnade resp 2 kr, 3,50 kr och 3 kr, men på det fjärde lämnade den första 1 kr och de övriga var och en 1 kr mer än den föregående. Tillsammans inbragte insamlingen 123 kr. På det första kontoret fanns 2 personer mer än 4 gånger antalet på det andra. Hur många personer fanns det på varje kontor?  
(Svar: I ordning 10, 2, 6 och 12 personer)
- 845.** I en cirkel med radien  $r$  äro inskrivna fyrhörningar, vilkas sidor hava samma mätetal  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , men sidornas ordningsföljd är

olika och vilken som helst. Dessa figurer hava lika stora ytor  $y$ . Av diagonalerna äro högst tre olika,  $e$ ,  $f$ ,  $g$ . Visa dessutom, att

$$4ry = efg$$

och att

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Liknande uttryck gälla för  $f^2$  och  $g^2$ .

### Tredje häftet

**846.** Sök vinklarna i den största av de i en given cirkel inskrivna trianglar, i vilka en vinkel är  $60^\circ$  större än en annan. (Stig Comét.)

**847.** Hur många reella rötter har ekvationen

$$x^2 + 2x - \log\left(x^2 + 2x + \frac{5}{4}\right) = 0?$$

(log betecknar den naturliga logaritmen) (Stig Comét.)

**848.** Mot en sida i en triangel drages höjden, bissektrisen och medianen. De skära triangelsidan i punkterna  $H$ ,  $B$  och  $M$  resp., vilka ej sammanfalla. Sök gränsvärdet av förhållandet mellan sträckorna  $HM$  och  $BM$ , då triangeln tenderar att bli liksidig. (Stig Comét.)

### Enklare matematiska uppgifter

**849.** Beräkna  $y$ , då  $y = \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x + \cos^4 x$ .  
(Svar: 1 eller 0)

**850.** Lös ekvationen

$$(1 + 2 \cos x) \cdot \cos(x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Svar:  $180^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  $80^\circ + n \cdot 120^\circ$ )

**851.** I en oändlig geometrisk serie är kvoten  $= \sin 2x$  och andra termen  $= \sin 4x$ . Bestäm  $x$  så, att seriens summa blir 4.  
(Svar:  $x = 18,43^\circ + n \cdot 180^\circ$ )

**852.** I fyrhörningen  $ABCD$  är diagonalen  $AC$  bissektris till vinkeln  $A$ , som är  $60^\circ$ , samt medelproportional till  $AB$  och  $AD$ . Därjämte är  $AB - AD = AC$ . Bestäm vinkeln  $B$ .  
(Svar: Man får  $\cot B = \sqrt{5} - \sqrt{3} + 1$ ;  $B = 33,62^\circ$ )

**853.** Visa, att för varje triangel gäller

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0.$$

**854.** I triangeln  $ABC$  är  $AM$  median. Visa, att

$$\cot \angle CAM - \cot \angle MAB = 2 \cot \angle AMB.$$

**855.** I den liksidiga triangeln  $ABC$  äro  $P$ ,  $Q$  och  $R$  punkter på resp. sidorna  $AB$ ,  $BC$  och  $CA$ . Linjerna  $AQ$ ,  $BR$  och  $CP$  avgränsa en triangel. Bestäm dess yta, om  $AP = BQ = CR = \frac{AB}{3}$ .

(Svar:  $\frac{1}{7}$  av den ursprungliga triangelns yta)

**856.** Omkretsen av ett parallelltrapets är  $2p$ . Två vinklar äro  $60^\circ$ . Angiv maximivärdet av trapetsets yta.

(Svar:  $\frac{p^2 \sqrt{3}}{8}$ )

**857.** Bestäm vinklarna i en rätvinklig triangel med konstant hypotenusan, om produkten av höjden mot hypotenusan och ena katetprojektion skall bli ett maximum.

(Svar:  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  och  $90^\circ$ )

**858.** En lantbrukare vill inhägnat ett rektangulärt område med ståltrådsnät både upptill (tak) och på sidorna, så att stängslet överallt blir 2 m högt. Han har till sitt förfogande 442 m nät av 2 m bredd. Hur stor är den största yta, som kan inhägnas?

(Svar:  $676 \text{ m}^2$ )

**859.** Sök den största spetsiga vinkel, som en tangent till kurvan  $3y(x^2 + 1) = 8$  kan bilda med kurvans asymptot.

(Svar:  $60^\circ$ )

**860.** Bestäm  $a$  i ekvationen  $y = ax(x - 1)(x - 2)$  så, att funktionskurvas normal i origo blir tangent.

(Svar:  $a = \pm\sqrt{2}$ )

**861.** I rektangeln  $ABCD$  är  $AB = 5 \text{ cm}$  och  $BC = 2 \text{ cm}$ . Bestäm på  $AB$  en punkt  $P$ , så att produkten av  $PC$  och  $PD$  blir ett minimum.

(Svar:  $PA = 4$  eller  $1 \text{ cm}$ )

**862.** En liksidig kons mantelyta delas i tre lika delar av två plan genom samma generatris. Hur stor är vinkeln mellan dessa plan?

(Svar:  $67,38^\circ$ . ( $\cos v = \frac{5}{13}$ ))

**863.** Två parallella plan med avståndet 2 cm utskära en klotskiva i ett klot. Bestäm skivans volym, om det plan, som går mitt emellan de givna, utskär en cirkel med ytan  $1 \text{ dm}^2$ .

(Svar:  $200 - \frac{2\pi}{3} = 197,91 \text{ cm}^2$ )

## Fjärde häftet

864. Visa, att

$$\left[ \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{[a_1, a_2, b_1, b_2]}, \dots, \frac{a_i b_k - a_k b_i}{[a_i, a_k, b_i, b_k]}, \dots, \frac{a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}}{[a_{n-1}, a_n, b_{n-1}, b_n]} \right] = \frac{[a_1 b_2 - a_2 b_1, \dots, a_i b_k - a_k b_i, \dots, a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}]}{[a_1, \dots, a_n, b, \dots, b_n]},$$

där  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  äro hela tal och parenteserna beteckna största gemensamma divisorn. (Erik Berg.)

865. I ett rätvinkligt koordinatsystem är  $x$ -axeln den gemensamma huvudaxeln för linserna i ett system, som avbildar enligt den elementära teorin. Vi betrakta lineära föremål, vinkelräta mot  $x$ -axeln. Ett sådant på  $x = 0$  avbildas i naturlig storlek, men upp- och nedvänt på  $x = 7$ ; ett föremål på  $x = 2$  avbildas rättvänt och lika stort på  $x = 4$ .

- 1:o Var ligga föremål och bild, då förstoringen är  $m : n$ ?
- 2:o Var ligga föremål och bild, då skillnaden mellan deras abskissor äro  $a$ ?
- 3:o Karakterisera primära strålar, som äro parallella med tillhörande sekundära.

(X.)

866. I ekvationen  $y = x^3 + ax^2 + bx$  äro  $a$  och  $b$  positiva storheter, underkastade villkoret  $a + b \leq 6$ . Huru stor är sannolikheten, att funktionskurvan saknar maximi- eller minimipunkt? (C.-E. Fröberg.)

## Enklare matematiska uppgifter

867. Hur stor är toppvinkeln i de likbenta trianglar, som genom en rät linje kunna uppdelas i två likaledes likbenta trianglar?

(Svar:  $\frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5}$ )

868. Ekvationen  $x^3 + 3px + 2q = 0$ , satisfieras av  $x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ . Bestäm  $p$  och  $q$ , då de äro rationella tal.

(Svar:  $p = 2; q = -1$ )

869. Visa, att  $\frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} \leq \frac{1}{8}$ , om  $a, b$  och  $c$  äro positiva tal.

870. I en cirkel med medelpunkten  $O$  inskrives en fyrhörning  $ABCD$ , i vilken  $AB = AD$  och  $\angle BAD = 90^\circ$ .  $AO$  skär utdragen  $BC$  i  $E$ , varvid fyrhörningen  $CDOE$  blir likformig med fyrhörningen  $ABCD$ . Beräkna förhållandet mellan deras ytor.

(Svar:  $2 + \sqrt{2}$ )

- 871.** Lös ekvationen  $1 - 4 \cos^3 v = 3 \cos^2 v - 2 \cos v$ .  
(Svar:  $180^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  $\pm 50,18^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  $\pm 112,98^\circ + n \cdot 360^\circ$ )
- 872.** Visa, att summan av serien  $\tan x + \tan 2x + \cot 2x + \tan 4x + \cot 4x + \dots + \tan 2^n x + \cot 2^n x$  är  $= \cot x - 2 \cot 2^{n+1} x$ .
- 873.** Bestäm  $k$  så, att det  $x$ -värde, som gör funktionen  $y = 4x + \frac{2}{2x - k}$  till ett minimum, blir tre gånger så stort som det  $x$ -värde, som gör samma uttryck till maximum.  
(Svar:  $k = 2$ )
- 874.** I en given cirkel dragas kordorna  $AB = AC = l$ . Från en variabel punkt  $P$  på bågen  $P$  på bågen  $AB$  fälls normalerna  $PM$  och  $PN$  mot dessa kordor. Hur lång är  $AP$ , då ytan av triangeln  $PMN$  är ett maximum?  
(Svar:  $\frac{l}{\sqrt{2}}$ )
- 875.** Om  $k$  är en konstant  $\neq 0$ , definierar ekvationen  $y^2 + y \cdot f(x) = k^2$  två funktioner  $y_1(x)$  och  $y_2(x)$ , för vilka  $\left(\frac{y'_1}{y_1} - \frac{y'_2}{y_2}\right)(y_1 - y_2)$  kan uttryckas i  $f'(x)$  enbart.  
(Svar:  $-2f'(x)$ )
- 876.** Från en godtycklig punkt  $P$  fällas normaler  $PN_1, PN_2, PN_3$  mot sidorna i en liksidig triangel. Visa analytiskt, att tyngdpunkten till triangeln  $N_1 N_2 N_3$  ligger mitt emellan  $P$  och den liksidiga triangelns mittpunkt.
- 877.** En triangel har två hörn i punkterna  $(0; 3)$  och  $(6; 0)$ . Det tredje hörnet glider utefter räta linjen  $x + 2y + 3 = 0$ . Vilka äro detta hörns koordinater, då avståndet från origo till triangelns tyngdpunkt är ett minimum?  
(Svar:  $(-4, 2; 0, 6)$ )
- 878.** I en regelbunden oktaeder förenas ett hörn  $A$  med tyngdpunkten  $B$  till en av de sidoytor, som ej gå genom  $A$ . Visa, att  $AB$  har en längd = oktaederns kant.
- 879.** Från ett hörn  $O$  av en regelbunden oktaeder utgå i ordning kantlinjerna  $OA, OB, OC$  och  $OD$ .  $P$  och  $Q$  äro mittpunkterna av  $AB$  och  $OC$ . Vilken vinkel gör  $PQ$  med planet  $ABCD$ ?  
(Svar:  $\tan \alpha = \sqrt{0,2}$  varav  $\alpha = 24,10^\circ$ )
- 880.** Visa, att om  $a, b$  och  $c$  äro sidovinklar och  $\alpha, \beta$  och  $\gamma$  motstående kantvinklar i ett tresidigt hörn, så är

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

- 881.** En bil  $A$  kör på en rak väg med hastigheten  $v$  km/tim. En annan bil  $B$  med hastigheten  $V$  km/tim söker köra om  $A$ . Omkörningen antages börja, när  $B$  är  $a$  m bakom  $A$  samt vara avslutad, när  $B$  befinner sig  $a$  m framför  $A$ . Vardera bilens längd  $= l$  m. Hur lång vägsträcka  $x$  (från  $B$  räknat) måste, när omkörningen börjar, vara fri från mötande fordon med hastighet  $W$  km/tim. för att möte icke skall inträffa, medan omkörningen pågår?

(Svar:  $x = \frac{2(a+l)(V+W)}{V-v}$  m. Man kan sätta  $W = 100$ ,  $a = 10$ ,  $l = 4$ ,  $v = 30, 40, \dots, 100$  samt avläsa  $x$  som funktion av  $V$ . Lägg märke till de stora  $x$ -värdena för små värden på differensen  $V - v$ .)