

Årgång 30, 1947

Första häftet

- 1500.** Om $(x_0; y_0; z_0)$ är en lösning till systemet $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, $\sin x + \sin y + \sin z = 0$, så äro $(x_0 + y_0; y_0 + z_0; z_0 + x_0)$ och $(2x_0; 2y_0; 2z_0)$ även lösningar. Visa detta utan att lösa systemet. (X.)
- 1501.** Om p är ett primtal och m ett godtyckligt, positivt helt tal, hur många faktorer p finnes det då i $p^m!$? (Per Olof Fröman.)
- 1502.** Om en rympolygon beskrives i en given riktning, bildar planet genom dess i :e sida och en fix punkt vinklarna u_i och v_i med planet genom sidan och föregående resp. påföljande hörn. Storheterna u_i och v_i ha samma eller skilda tecken, allteftersom föregående och påföljande hörn ligga på samma sida eller olika sidor om planet genom polygonsidan och den fixa punkten. Sök relationen mellan dessa vinklar. (N. J.)

Enklare matematiska uppgifter

- 1503.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + xy + y^2 - a = 0 \\ x^2 + xy + y + a = 0 \end{cases}$$

(Svar: $x_1 = a, y_1 = -a; x_2 = \frac{1}{2}(a-1); y_2 = -\frac{1}{2}(a+1)$)

- 1504.** En konvergent, oändlig geometrisk serie med summan $16/15$ är given. Mellan första och andra, andra och tredje, tredje och fjärde o.s.v termerna inskjutas nya termer. Den uppkomna talserien, bestående av de ursprungliga och de nya termerna, kan bildas på två olika sätt, varigenom två olika geometriska serier uppkomma, vilkas summor ha differensen $4/3$. Vilken är den ursprungliga serien?

(Svar: 1, $1/16$, o.s.v)

- 1505.** $ABCD$ är en kvadrat. Sök en punkt P i eller utom kvadratens plan, så belägen att $\overline{PA}^2, \overline{PB}^2, \overline{PD}^2$ och \overline{PC}^2 bilda aritmetisk serie.

(Svar: Villkoret uppfylles av varje punkt i det normalplan mot medianen från B i $\triangle ABD$, som går genom kvadratens centrum)

- 1506.** Diametern i en cirkel med radien r delas i n lika delar, och genom delningspunkterna dragas kordor vinkelrätt mot diametern. Sök summan av dessa kordors kvadrater.

(Svar: $\frac{8r^2(n^2-1)}{3n}$)

- 1507.** Ett 90 m djupt borrhål skulle borras i jorden. Första dagen borrade man 200, andra 198, tredje 196 cm o.s.v. i aritmetisk serie. Varje arbetsdag var borret i verksamhet 8 effektiva timmar. Hur många timma refordrades för hela arbetet? Borret antages sänka sig med konstant hastighet under en och samma dag.
(Svar: $538\frac{2}{3}$)
- 1508.** I en cirkel (radie r) inskrives en triangel, och i de mellan cirkeln och triangeln belägna tre segmenten inskrivas cirklar (radier r_1, r_2, r_3). Visa, att $r_1 + r_2 + r_3 < r$.
- 1509.** I en likbent triangel inskrevs symmetriskt en kvadrat, vilkens yta befanns vara hälften av triangelns. Sök förhållandet mellan den likbenta triangelns bas och den häremot dragna höjden.
(Svar: 1 : 1)
- 1510.** I en cirkelsektor med medelpunktsvinkeln $\nu \leq 90^\circ$ kan på två sätt en kvadrat inskrivas. Bestäm ν för det fall, att de två kvadraterna äro lika stora.
(Svar: 30°)
- 1511.** Visa utan beräkning av termerna, att $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 0,5$.
- 1512.** Kring triangeln ABC , där vinkeln $A = 60^\circ$, är en cirkel omskriven. Mittpunkten av bågen BC tages till centrum för en cirkel, som går genom B och C och skär AB i D . Beräkna vinkeln B , om $AD : DB = 1 : 2$.
(Svar: $B = 19,11^\circ$)
- 1513.** Kring triangeln ABC omskrives en cirkel. Mittpunkten av bågen BC tages till centrum för en cirkel genom B och C . Visa, att bissektrisen till vinkeln A av sistnämnda cirkel delas i förhållandet $\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) : \sin\left(\frac{A}{2}\right)$. ($B < C$).
- 1514.** Två plan P och Q skära varandra under 60° vinkel. I P är en rätvinklig triangel med kateterna 3 cm och 4 cm uppritad. Den räta vinkelns spets ligger på planens skärningslinje, och den större kateten bildar 30° vinkel med denna linje. Hur lång är hypotenusans projektion på Q ?
(Svar: $\frac{1}{4}\sqrt{271 \pm 72\sqrt{3}} = 4,97$ cm eller 3,02 cm)
- 1515.** En rak, parallellt stympad kons basradier R och r samt höjd h . Sök rätliniga avståndet mellan två punkter, en på vardera bottenperiferin, om deras vinkelavstånd i vardera bottenytan från en fix generatris äro α och β .
(Svar: $\sqrt{h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha \pm \beta)}$)
- 1516.** En med x -axeln parallell linje skär i första axelvinkeln kurvan $y = x^2$ i en punkt P och i andra axelvinkeln cirkeln $x^2 + y^2 = 36$ i Q .

Beräkna maximum av sträckan PQ .
(Svar: $\sqrt{50}$ enheter)

Andra häftet

1517. Sidan i en liksidig triangel är a . Beräkna sidan i den triangel som begränsas av

- de gemensamma yttre tangenterna till de vidskrivna cirkelarna,
- de gemensamma kordorna till dessa cirklar och den omskrivna cirkeln.

Kanten i en regelbunden tetraeder är a . Beräkna kanten till den tetraeder som begränsas av

- de yttre tangentplanen till de vidskrivna sfärerna,
- planen för sektionerna mellan dessa sfärer och den omskrivna sfären.

(N. J.)

1518. I triangeln ABC tangerar den inskrivna cirkeln resp. sidor i A_1 , B_1 , C_1 . Visa, att $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$, $\overline{CC_1}^2$ bilda en aritmetisk serie, om h_a , h_b , h_c göra det och vice versa. (X.)

1519. Visa, att om A , B och C äro vinklar i en triangel, så gäller

$$\frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{C}{2}} \geq 2.$$

(B. Svenonius.)

Enklare matematiska uppgifter

1520. Lös ekvationen $(\tan x + \cot x)^2 = \tan 3x + \cot 3x$.
(Svar: $\pm 28,58^\circ + n \cdot 90^\circ$)

1521. I en regelbunden månghörning är sidan s , de kortaste diagonalerna d_1 och d_2 . Bestäm antalet sidor, om $\frac{1}{s} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$.
(Svar: 7)

1522. I triangeln ABC är E en punkt på BC . Uttryck AB , AC och AE i R , h_a och de kring deltriangelarna ABE och ACE omskrivna cirkelrads radier R_1 och R_2 .

$$\text{(Svar: } AB = \sqrt{\frac{2RR_1h_a}{R_2}}, AC = \sqrt{\frac{2RR_2h_a}{R_1}}, AE = \sqrt{\frac{2R_1R_2h_a}{R}})$$

- 1523.** I triangeln ABC , där $AB = AC$ och $h_a = a$, ligger A i punkten $(-3; 3)$ samt höjdernas skärningspunkt i origo. Bestäm sidornas ekvationer.
(Svar: $x + 3y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$, $3x + y + 6 = 0$)
- 1524.** På en rätvinklig triangelns sidor uppritas utåt eller inåt likformiga och likställda figurer. Deras tyngdpunkter äro hörn i en ny triangel. Visa, att dess tyngdpunkt sammanfaller med den rätvinkliga triangelns.
- 1525.** En triangel har sina hörn i $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(0; 4)$. Bestäm ekvationen för den cirkel, som går genom de vidskrivna cirklarnas medelpunkter.
(Svar: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$)
- 1526.** Från en punkt P på linjen $x + y = 2$ dragas tangenterna till cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Sök orten för tangentkordans mittpunkt, då P beskriver linjen.
(Svar: $2x^2 + 2y^2 - x - y = 0$)
- 1527.** Sök ekvationerna för de gemensamma tangenterna till kurvorna $y = x^3$ och $y = 2 + (x - 2)^3$.
(Svar: $9x - 9y \pm 2\sqrt{3} = 0$, $3x - y - 2 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$)
- 1528.** Bestäm konstanterna a och b så, att kurvorna $y = ax^3 + bx$ och $y = bx^3 + ax$ skära varandra under rät vinkel i alla skärningspunkterna.
(Svar: $a = \pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $b = \pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ med villkoret $ab = -1$)
- 1529.** Från en punkt P på positiva x -axeln drages till kurvan $y = x^2$ tangenten PT (ej sammanfallande med x -axeln) och normalen PN . Bestäm P så, att vinkeln TPN blir så liten som möjligt.
(Svar: $(\frac{3}{4}, 0)$)
- 1530.** I en cirkel med radien r drages en korda, och med denna som diameter ritas en cirkel. Hur skall kordan dragas, för att denna cirkel med sin yttersta punkt skall nå så långt som möjligt från den givna cirkelns centrum?
(Svar: $r\sqrt{2}$)
- 1531.** En kropp F rör sig med hastigheten $1,25v$ i en cirkel med medelpunkten O , där A och B äro två diametralt motsatta punkter. I tätt liggande punkter på cirkeln utsänder F , som rör sig från A mot B , en kort signal, som fortplantar sig rätlinigt åt alla håll med hastigheten v . Signalernas ankomsttider registreras i B . En av dessa signaler inträffar i B senare än de övriga. I vilken punkt befann sig F , då denna signal utsändes?
(Svar: Vinkeln $BOP = 73,7^\circ$)

Tredje häftet

- 1532.** Vilken är orten för radikalcentrum (radikalaxlarnas skärningspunkt) till 3 cirklar med fixa medelpunkter och varierande, proportionella radier? *(N. J.)*
- 1533.** Två cirklar äro givna, den ena omslutande den andra. Från en rörlig punkt A på den yttre cirkeln dragas två tangenter till den inre. Tangenterna skära den förstnämnda i B och C . Sök
- orten för tangentkordans mittpunkt samt
 - orten för medelpunkten till den i triangeln ABC inskrivna cirkeln.
- När sammanfalla dessa bägge orter? *(L. Sandgren.)*
- 1534.** I en regelbunden 11-hörning $A_0A_1 \dots A_{10}$, inskriven i en cirkel med radien R och centrum O , placeras lika massor i A_1, A_3, A_4, A_5, A_9 . Var ligger deras tyngdpunkt? Hur äro de fem hörnen valda? *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

- 1535.** Medianen i en triangel delar en vinkel i två delar α och β . En viss av triangelns övriga vinklar är γ . Visa, att vid lämpligt val av beteckningar $\cos(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta + \gamma)$.
- 1536.** Från en punkt P drages tangenten PT till en cirkel med centrum O ; PO råkar förlängd cirkeln i A . Om $\angle APT = 2\nu$, bestäm $\tan \angle TAP$.
(Svar: $(1 - \tan \nu) : (1 + \tan \nu)$)
- 1537.** En fyrhörning med vinkelräta diagonaler har i ordning sidorna a, b, c, d . Visa, att $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Bevisa även satsens omvändning.
- 1538.** Lös ekvationen $\sin 5x + \sin 4x + \sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$.
(Svar: $n \cdot 60^\circ; \pm 72^\circ + n \cdot 360^\circ; \pm 144^\circ + n \cdot 360^\circ$)
- 1539.** För vilka spetsiga eller trubbiga vinklar gäller olikheten $2 \cos x < \cos 2x < \cos x$?
(Svar: $111,47^\circ < x < 120^\circ$)
- 1540.** De genom punkterna A och B på kurvan $y = x^3 - ax$ dragna normalerna äro parallella med kurvans tangent i origo. Bestäm a så, att linjen AB får ekvationen $3y = x$.
(Svar: $a = 0,5$)
- 1541.** Visa, att kurvan $60y = 25x^3 - 3x^5$ har två parallella dubbeltangenter med vinkelkoefficienten $25 : 36$.

- 1542.** Från en punkt kan som bekant högst tre normaler dragas till en parabel. Sök orten för de punkter, för vilka åtminstone två av normalerna till parabeln $y^2 = 2px$ sammanfalla.
(Svar: $8(x-p)^3 = 27py^2$)
- 1543.** Från ena ändpunkten av en korda i en cirkel fälles normalen mot tangenten i den andra. Sök maximum för ytan av den erhållna triangeln. Radien = r .
(Svar: $\frac{3r^2\sqrt{3}}{8}$)
- 1544.** Genom två av skärningspunkterna mellan en parabel och en cirkel som går genom fokus dragas tangenterna till parabeln. Visa, att den omskrivna cirkelns centrum i den av tangenterna och tangentkordan bildade triangeln ligger på den givna cirkeln.

Fjärde häftet

- 1545.** Om x , y och z äro positiva tal, finnes ingen triangel, vars sidor ha längderna $(1+x^2)(y-z)^2$, $(1+y^2)(z-x)^2$ och $(1+z^2)(x-y)^2$. (X.)
- 1546.** Man uppritar de parabelbågar som tangera en triangels sidor två och två i sidornas icke gemensamma ändpunkter. Dessa bågar uppdelar triangelns inre i sju områden. Sök förhållandena mellan dessa områdens areor. (X.)
- 1547.** En rät linje genom en tetraeders tyngdpunkt T skär sidoytorna eller deras förlängningar. Tag T som origo och inför en positiv riktning på linjen. Om koordinaterna för skärningspunkterna äro x_1 , x_2 , x_3 och x_4 så gäller

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0.$$

(N. J.)

Enklare matematiska uppgifter

- 1548.** Lös systemet $yz = ax + b$, $zx = ay + b$, $xy = az + b$.
(Svar: $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$; $x_2 = y_2 = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$; $x_3 = a - \frac{b}{a}$, $y_3 = z_3 = -a$; $x_4 = -a$, $y_4 = a - \frac{b}{a}$, $z_4 = -a$; $x_5 = y_5 = -a$, $z_5 = a - \frac{b}{a}$)
- 1549.** Lös ekvationen $1 : (2 \sin x - 1) = 1 + 2 \sin 3x$.
(Svar: $45^\circ + n \cdot 90^\circ$, $54^\circ + n \cdot 360^\circ$, $126^\circ + n \cdot 360^\circ$, $198^\circ + n \cdot 360^\circ$, $342^\circ + n \cdot 360^\circ$)

- 1550.** I ett parallelltrapets är den ena basen dubbelt så stor som den andra. I trapetsen kunna inpassas två med baserna parallella linjer, som delas i tre lika delar av trapetsets diagonaler. Hur många procent av trapetsets yta ligger mellan dessa linjer?
(Svar: 27%)
- 1551.** I en cirkel med radien R är inskriven en triangel ABC med ytan T . Höjden AA_1 drages, och normalerna A_1P mot AC och A_1Q mot AB fällas. Beräkna PQ .
(Svar: $T : R$)
- 1552.** Linjerna $y = kx + l$, $y = kx + l + a$, $y = (k+c)x + m$, $y = (k+c)x + m + b$ bilda en parallelogram. Beräkna dess yta.
(Svar: $\left| \frac{ab}{c} \right|$)
- 1553.** I triangeln ABC är M mittpunkten av sidan AB . Triangeln MBC vrids 90° kring M till läget MC_1B_1 , varvid $C \rightarrow C_1$ och $B \rightarrow B_1$. Visa, att mittpunkterna av sidorna i fyrhörningen ACC_1B_1 utgöra hörnen i en kvadrat.
- 1554.** O är origo i ett rätvinkligt axelsystem och A den punkt på x -axeln, vars x -koordinat är 6; B är en punkt på 3 enheters avstånd från origo. Man uppritar den cirkel genom O och A som tangerar OB och den cirkel genom O och B som tangerar OA . Dessa cirkelråkas utom i O även i C . Sök orten för denna punkt, när OB vrids sig kring O .
(Svar: Cirkeln $(x+2)^2 + y^2 = 16$)
- 1555.** Linjerna AB , BC och CA tangerar en parabel med brännpunkten F och styrlinjen s . Linjen genom A parallell med BC skär s i A_1 , linjen genom B parallell med CA skär s i B_1 och linjen genom C parallell med AB skär s i C_1 . Man konsturerar A_2 , B_2 , C_2 så, att A är mittpunkt till A_1A_2 , B till B_1B_2 och C till C_1C_2 . Visa, att A_2 , B_2 , C_2 och F ligga i rät linje.
- 1556.** Sök orten för skärningspunkten mellan de tangenter till kurvorna $y^2 = (x+1)^3$ och $y^2 = (x-1)^3$, som ha vinkelkoefficienterna k resp. $-k$, när k varierar.
(Svar: $4y^2 = 27x$)
- 1557.** Sök ekvationerna för de tangenter till kurvan $y(x^2 + x + 1) = x^2 + 1$ som gå genom maximipunkten.
(Svar: $y = 2$; $x + y = 1$; $x - 3y = -7$)
- 1558.** Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en given cirkel. Sidorna AB och CD är lika stora. Diagonalen AC är d . Sök maximum av fyrhörningens yta.
(Svar: $d^2 : 2$)