

Årgång 39, 1956

Första häftet

- 2028.** En regelbunden dodekaeder och en regelbunden ikosaeder äro omskrivna kring samma klot (eller inskrivna i samma klot). Bestäm förhållandet mellan kropparnas volymer utan att beräkna dem var för sig. (X.)
- 2029.** I varje triangel är $(p-b)(p-c) : bc = \sin^2 \frac{1}{2}A$. Visa detta utan annan trigonometri än definitionen av sinus. (X.)
- 2030.** Bestäm heltalslösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} y^3 = 5x + 2, \\ x^3 = 5z + 2. \end{cases}$$

(D. F. I.)

Enklare matematiska uppgifter

- 2031.** Förenkla uttrycket $\sqrt[n]{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^n} : \sqrt[2n]{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdots x^{2n-1}}$.
(Svar: \sqrt{x})
- 2032.** Visa att uttrycket
- $$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta)$$
- har samma värde för alla vinklar.
(Svar: 2)
- 2033.** Sidorna i en parallelogram äro a och b ($a > b$). Ytan är $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. Bestäm vinkeln mellan diagonalerna.
(Svar: 45°)
- 2034.** I den spetsvinkliga triangeln ABC förenas den omskrivna cirkelns medelpunkt O med hörnen. Om ett av måtetalen till de tre triangelytorna BOC , COA och AOB är medeltalet till de båda andra, så är även ett av talen $\tan A$, $\tan B$ och $\tan C$ medeltalet till de båda andra.
- 2035.** Linjen AB är diameter i en halvcirkel. På samma sida om AB ritas en cirkelbåge, vars medelpunktsvinkel är 90° . M är en punkt på sistnämnda båge och N en punkt på halvcirkeln. De båda punkterna äro så belägna, att medelpunktsvinklarna för bågarne AM och AN äro α° resp $2\alpha^\circ$. I vilket förhållande delas ytan mellan bågarne AB av linjen MN ?
(Svar: $\tan^2 \alpha$)

2036. En rät vinkel har sin spets på y -axeln, ena benet går genom punkten $(3, 4)$, det andra skär x -axeln i P . Sök maximum av sträckan OP , där O är origo.

(Svar: $4/3$ längdenheter)

2037. Man har $y = f(x)/(x - a)$. Visa att

$$y'''(0) = -\frac{6f(a)}{a^4}$$

om f är ett polynom av högst tredje graden.

2038. På en jordglob äro A och B punkter på ekvatorn och N ena polen. Storcirkelbågarna AB , AN och BN äro alla 12 cm. En punkt på globen ligger 6 cm från N och 8 cm från A . beräkna avståndet PB , om alla avstånd äro storcirkelbågar.

(Svar: 8cm eller 16 cm.)

2039. Koordinataxlarna äro symmetriaxlar till en liksidig hyperbel, asymptoter till en annan hyperbel. Visa att kurvorna råkas under rät vinkel.

2040. Punkten P rör sig på den i första axelvinkeln liggande delen av räta linjen $y = 1$. Punkterna $A(\sqrt{2}, 0)$, $O(0, 0)$ och $B(-\sqrt{2}, 0)$ förenas med P . Sök det största värde skillnaden mellan vinklarna OPA och OPB kan nå.

(Svar: 45° .)

Andra häftet

2041. I triangeln ABC , där r är radien i den in-, r_a radien i den vid sidan BC vidskrivna cirkeln, drages en transversal genom A , som skär BC i D mellan B och C . Sök ett samband mellan radien x i den i triangeln ABD inskrivna och radien y i den vid DC i triangeln ADC vidskrivna cirkeln, som endast innehåller de givna storheterna.

(X.)

2042. Normalerna mot de linjer, som innehålla sidorna BC , CA , och AB i triangeln ABC från en punkt i rymden, råka dessa linjer i resp. A_1 , B_1 och C_1 . Vilken relation råder mellan vinklarna AA_1C , BB_1A och CC_1B ? Sök med hjälp av sambandet orten för P , då vinklarna BB_1A och CC_1A är lika.

(N.J.)

2043. Punkterna A , B , C , D ligga på en rät linje i angiven bokstavsföljd. Man sätter $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$ och förutsätter att $x(x + y) = z^2$ och $y(y + z) = x^2$. Visa, att x , y , z kunna vara sidor i en triangel. Beräkna dess vinklar.

(efter Archimedes.)

Enklare matematiska uppgifter

- 2044.** Lös ekvationen $0,3(\tan x + \cot x) = \sin 2x + \cos 2x$.
(Svar: $13,28^\circ + n \cdot 90^\circ$; $-35,78^\circ + n \cdot 90^\circ$)
- 2045.** I en likbent triangel är basen a och benen b . I vilket förhållande delas triangelns yta av höjden mot en av de lika sidorna?
(Svar: $a^2 : (2b^2 - a^2)$. Villkor: $a < b\sqrt{2}$.)
- 2046.** I triangeln ABC delar höjden från A sidan BC innantill i förhållandet 3:10 från C räknat. Höjden från B delar AC i förhållandet 1:5 från C räknat. Bestäm triangelns vinklar.
(Svar: $A = 45^\circ$; $B = 56,31^\circ$; $C = 78,69^\circ$.)
- 2047.** Hypotenusan i en rätvinklig triangel är a och ytan T . En cirkel går genom den räta vinkelns spets och tangerar hypotenusan i dess mittpunkt. Visa att cirkelns radie är $a^3/16T$.
- 2048.** En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel, varvid $AB = BC = a$, $CD = x$, $DA = y$ och $BD = d$. Visa, att $xy = |d^2 - a^2|$.
- 2049.** Visa, att den cirkel som går genom två hörn och höjdernas skärningspunkt i en triangel, är lika stor som den kring triangeln omskrivna cirkeln.
- 2050.** Man väljer tre olika stora positiva tal, a , b och c . Visa, att ekvationen $(b+c-a)x^2 - 2bcx + abc = 0$ alltid har två olika stora, positiva rötter, om $a < b < c$.
- 2051.** I en ellips drages en korda AB parallellt med storaxeln. Tangenterna i A och B råkas i C . Visa, att cirkeln genom A , B och C går genom ellipsens brännpunkter.
- 2052.** Genom en rörlig punkt på kurvan $y = x^2$ dragas kordor PA och PB med vinkelkoefficienterna 0 och 1. Sök orten för mittpunkten av AB . Visa, att AB är tangent till orten.
(Svar: $4y = 4x^2 + 1$.)
- 2053.** Man har $y = 3(\tan x - \cot x) + \frac{1}{3}(\tan^3 x - \cot^3 x)$. Visa, att $y' = 16/\sin^4 2x$.

Tredje häftet

- 2054.** Symmedianerna i en triangel råka den omskrivna cirkeln på nytt i tre punkter. Konstruera triangeln, då dessa punkter äro givna.
(X.)
- 2055.** I vilka trianglar med heltalssidor ha omkrets och yta samma mätetal?
(V. Thébault.)

- 2056.** I en rak kon med lodrät axel och toppen nedåt finnes en viss vätskevolym v . En rak cylinder, vars axel sammanfaller med konens, nedsänkes i vätskan, varvid den del av cylindern som befinner sig under vätskeytan, har volymen v_1 . Visa, att $v_1 \leq 0,8v$. Men hur många procent stiger ytans höjd över toppen, när $v_1 = 0,8v$? (I. Gunsjö.)

Enklare matematiska uppgifter

- 2057.** I triangeln ABC är AB 4 cm och AC 5 cm. Hur stor skall BC vara för att vinkeln A skall vara dubbelt så stor som vinkeln C ?
(Svar: 6 cm.)
- 2058.** En triangelns sidor förhålla sig som 3:8:10. Visa att en av triangelns vinklar är exakt tre gånger så stor som en annan av vinklarna.
- 2059.** Bestäm en punkt på linjen $x - 2y + 6 = 0$ så, att summan av kvadraterna på punktens avstånd till de tre punkterna $(3, -2)$, $(4, 9)$ och $(5, 8)$ blir så liten som möjligt.
(Svar: $(4, 5)$.)
- 2060.** AB är diameter i en cirkel och AC korda. D är en punkt på AB sådan att $AC = AD$. För vilken vinkel BAC är ytan av triangeln ACD så stor som möjligt?
(Svar: $35,26^\circ$.)
- 2061.** I en romb med en vinkel v inskrives en kvadrat. Hur stor bråkdel är dess yta av rombens?
(Svar: $\sin v / (1 + \sin v)$.)
- 2062.** En triangel ABC uppritad i ett rätvinkligt koordinatsystem, har hörnet A i origo och hörnet B på x -axeln. Flyttar man B till punkten $(10, 0)$ ökas triangelns yta med 3 ytenheter; flyttar man C till $(3, 8)$, ökas ytan av den ursprungliga triangeln med 9 ytenheter. Bestäm koordinaterna för hörnen B och C .
(Svar: B ligger i punkten $(\pm 9, 0)$ och C på linjen $y = \pm 6x$ eller B i $(\pm 2,5, 0)$ och C på linjen $y = \pm 0,8x$.)
- 2063.** Upprita kurvan $y = \tan^2 x + 2 \tan x$.
(Svar: period π , $y_{\min} = -1$ för $x = 3\pi/4 + n\pi$, inflexion saknas. Asymptoter $x = \pi/2 + n\pi$.)
- 2064.** Kurvan $y = x^2 + x \sin v + \cos v$ tangerar x -axeln för vissa bestämda värden på v . Bestäm exakta värdet på tangeringspunktens abskissa.
(Svar: $\pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.)
- 2065.** Den triangel, som bildas av höjdernas fotpunkter i triangeln ABC , har till sidor x -axeln, samt räta linjerna $4x - 3y + 24 = 0$ och $8x +$

$15y - 120 = 0$. Bestäm ekvationerna för sidorna i triangeln ABC .

(Svar: $2x - 9y + 72 = 0$, $0,4x - y - 60 = 0$, $2x + y + 12 = 0$. Dessutom tre lösningar, i vilka en av dessa sidor bibehålles, medan de båda andra utbytas mot tillhörande höjder.)

2066. Man har $x(b - a \tan y) = a + b \tan y$. Visa, att $y''' \cdot y' - 2(y'')^2 + 2(y')^3 = 0$.

2067. Konstruera kurvan $y = \sqrt{3 - 4 \sin x - 2 \cos 2x}$ för $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Svar: $y = 1 - 2 \sin x$ för $\sin x \leq 0,5$ och $y = 2 \sin x - 1$ för $\sin x \geq 0,5$; $y_{\max} = 1$ för $x = \pi/2$, $y_{\max} = 3$ för $x = 1,5\pi$, minima $= 0$ för $x = \pi/6$ och $5\pi/6$; gränsmax $= 1$ för $x = 0$ och gränsmin $= 1$ för $x = 2\pi$)

2068. Vilka äro de minsta primtalstvillingarna av typen $a^2 - 24$ och $a^2 - 26$?

(Svar: 601 och 599.)

Fjärde häftet

2069. Sök sambandet mellan summan och produkten av de tre storheterna

$$(a - b) : (a + b), (b - c) : (b + c), (c - a) : (c + a). \quad (X.)$$

2070. Radikalaxeln till en triangelns niopunktscirkel och den cirkel med centrum i Feuerbachs punkt, som skär en vidskriven cirkel under räta vinklar, är tangent till sistnämnda cirkel. (Kontaktpunkten för niopunktscirkeln och den i triangeln inskrivna cirkeln kallas Feuerbachs punkt.) *(V. Thébault.)*

2071. Visa, att

$$F(x, y) = \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + y\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} + y\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x + y\right)$$

är en jämn funktion, dvs $F(x, y) = F(-x, -y)$. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2072. Visa att ekvationen $7x^3 + 35x = 327$ har endast en reell rot, som med god approximation ger ett närmevärde på π .

2073. Vilka primtal mindre än 10 000 ha egenskapen att, om man efter talet sätter dess kvadrat, så är det så erhållna talet delbart med 333?

(Svar: 233, 4229 och 7559)

- 2074.** I en rätvinklig triangel är hypotenusan a längdenheter och mätetalen för yta och omkrets lika. Visa att ytan är $(2a + 4)$ ytenheter.
- 2075.** I en cirkel inskrives en rätvinklig triangel, i vilken höjden mot hypotenusan är 1 cm längre än ena katetens projektion på hypotenusan. Hur stor måste diametern minst vara?
(Svar: $2 + \sqrt{8} = 4,83$ cm)
- 2076.** Visa, att det ej finnes vinklar, som satisfiera ekvationen $\cot \alpha + \cot \beta = \cot(\alpha + \beta)$.
- 2077.** I en likbent triangel är en sida lika med den kring triangeln omskrivna cirkelns radie. Beräkna förhållandet mellan de vidskrivna cirkelns radier.
(Svar: $\tan 75^\circ : \tan 52,25^\circ = 2,863$, $\tan 15^\circ : \tan 82,5^\circ = 0,03528$, eller $\tan 30^\circ : \tan 75^\circ = 0,1547$.)
- 2078.** Med sidorna i en kvadrat som bas ritas utåt liksidiga trianglar. En cirkel med centrum i kvadratens mittpunkt går genom trianglarnas tyngdpunkter. Hur stor del av cirkelns periferi faller utanför både kvadraten och trianglarna?
(Svar: $\frac{1}{3}$)
- 2079.** Med sidan i en kvadrat som bas ritas utåt en likbent triangel. En cirkel med centrum i kvadratens mittpunkt går genom triangelns tyngdpunkt och delar de lika sidorna i förhållandet 1:3 från basen räknat. Sök förhållandet mellan triangelns och kvadratens ytor.
(Svar: $\frac{3}{28}(\sqrt{79} - 4) = 0,5237$)
- 2080.** I den i en cirkel inskrivna konvexa sexhörningen $ABCDEF$ är $ABDE$ en kvadrat och $ACDF$ en rektangel med sidorna a och b . Beräkna kordan BC , om $a > b$.
(Svar: $(a - b)/\sqrt{2}$)
- 2081.** Bestäm konstanten a , så att rektangeln, som bildas av tangenterna och normalerna i extrempunkterna till kurvan $y = 2x^3 - 6x^2 + ax$, får en yta av 256 ytenheter.
(Svar: $a = -18$)