

Årgång 44, 1961

Första häftet

2298. Beräkna för en triangel (med vanliga beteckningar)

$$\left(\sum (b^2 + c^2) \sin 2A \right) : T \quad (V. \text{Thébault.})$$

2299. I den vid A rätvinkliga triangeln OAB är OA fix, medan AB varierar. Om man på BO avsätter $BP = BA$, beskriver P strophoidbågen APO . Visa, att den yta som OA och bågen innesluter är lika med den del av kvadraten på OA , som ligger utanför cirkeln $(O; OA)$.

(X.)

2300. I fyhörningen $ABCD$ är $A + 2C = 180^\circ$, $AB = AD = r$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = d$. Visa, att $1 : b^2 + 1 : c^2 = 1 : (d+r)^2 + 1 : (d-r)^2$. (X.)

Enklare matematiska uppgifter

2301. Uppdela $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^2 - x^n$ i två faktorer, som båda är polynom; n är ett helt tal > 1 .

(Svar: $(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1})$)

2302. Om $x + y + z = a\sqrt{3}$, $x - 2y + z = b\sqrt{6}$, $x - z = c\sqrt{2}$, beräkna $x^2 + y^2 + z^2$.

(Svar: $a^2 + b^2 + c^2$)

2303. Om $x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, är $\sqrt{2 - \sqrt{2}} = ax^3 + bx$, där a och b är rationella tal. Bestäm dessa.

(Ledning: Multiplikation ger $\sqrt{2} = ax^4 + bx^2$.)

(Svar: $a = 1$, $b = -3$)

2304. Vilket samband råder mellan A , B och C , om

$$\frac{\tan B + \tan C}{\tan A + \tan C} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B} ?$$

(Svar: $A + B + C = n \cdot 180^\circ$ eller $A - B = n \cdot 180^\circ$)

2305. I en liksidig triangel med sidan 12 cm är en cirkel inskriven. Från hörnet A drages en sekant $AEFG$, som skär cirkeln i E och F samt BC i G . Om $AE = EF$, beräkna AG . Visa, att om $AE : AF : AG = e : f : g$ för $3 \geq f : e \geq 1$, är $4 : g = 1 : e + 1 : f$.

(Svar: $\sqrt{128}$ cm $\approx 11,31$ cm)

2306. I triangeln ABC ligger B och C på x -axeln, lika långt från origo. Hörnet A ligger i $(4; 1)$ och bisektrisen till A skär x -axeln i $(2; 0)$. Beräkna sidan BC .

(Svar: 6 l.e.)

- 2307.** Genom punkterna $(0; 9)$ och $(4; 4)$ går två mot varandra vinkelräta linjer, som skär x -axeln i A och B . Sök minimum för längden av AB .
(Svar: Absolut minimum 8 l.e. och relativt minimum 16 l.e.)
- 2308.** Ett cirkelsegments höjd är 5 cm och cirkelns radie 6 cm. I segmentet är en rektangel inskriven med två hörn på cirkeln. Sök maximum för dess yta.
(Svar: $10,5\sqrt{7} \text{ cm}^2 \approx 27,78 \text{ cm}^2$)
- 2309.** En tangent till en ellips bildar vinkeln v med storaxeln och vinkeln w med brännpunktsradien till tangeringspunkten. Visa, att excentriciteten är $|\cos w : \cos v|$.
- 2310.** I en triangel är en sida a cm, förhållandet mellan de båda andra är $k \neq 1$ och vinkeln mellan den givna sidan och bisektrisen till den motstående vinkeln v . Visa, att triangelns yta är $|a^2 k \sin 2v : 2(k^2 - 1)| \text{ cm}^2$.

Andra häftet

- 2311.** Visa, att talen $n^2(n^2 + 2)^2$ och $n^4(n^2 + 2)^2$ skrivs med samma siffror fast i motsatt ordning, då systemets bas är $n^2 + 1$. (*V. Thébault.*)
- 2312.** OA och OB är diametrar i två givna cirklar, som tangerar y -axeln i origo O och varandra innantill. En linje parallell med y -axeln skär dem i A_1 respektive B_1 . Sök orten för skärningspunkten mellan linjerna AA_1 och BB_1 . (*X.*)
- 2313.** Tre linjer avgränsar en triangel ABC . En cirkel med centrum I tangerar AC i B_1 och AB i C_1 , linjerna BI och CI råkar AC och AB i B_2 respektive C_2 ; B_3 och C_3 är fotpunkterna för höjderna från B och C i triangeln ABC , Visa, att linjerna B_1C_1 , B_2C_2 och B_3C_3 , som förutsättas distinkta, råkas i samma punkt, eventuellt oegentlig. (*Amer. Math. Monthly.*)

Enklare matematiska uppgifter

- 2314.** Två cirklar tangerar varandra innantill i P . Den störres medelpunkt O ligger inuti den mindre cirkeln, vars centrum är Q . Genom O och Q drages kordor AB och CD i den mindre respektive större cirkeln vinkelräta mot centrallinjen. visa, att $PA = PC$.
- 2315.** Två cirklar (O) , (O_1) med radierna R och R_1 samt medelpunkterna O och O_1 ligger så, att man kan draga två tangenter till (O) från (O_1)

och två till (O_1) från (O). Bestäm radien i den cirkel, som kan inskrivas i den konvexa firsiding, som bildas av tangenterna.

(Svar: $RR_1 : (R + R_1)$)

2316. Lös ekvationen $x : (2 + \sqrt{4-x}) + (x-3) : (1 + \sqrt{4-x}) = 1$.

(Svar: $x = 3$)

2317. Visa, att $\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\pi$. Men $\arctan x$ menas den vinkel, mätt i radianer, i första kvadranten, för vilken tangenten är $x > 0$.

2318. Kring en cirkel omskrives två likbenta trianglar, i vilka de lika stora sidorna är 10 cm. Basen i den ena är 12 cm. Hur stor är den i den andra?

(Svar: $(4 + \sqrt{76})$ cm)

2319. Sök den yta som begränsas av kurvorna $y = x^2 + x - 7$ och $y = 5 + x - x^2$ samt linjerna $x = -1$ och $x = 2$.

(Svar: 30 ytenheter)

2320. Bestäm konstanten a , så att räta linjen $x = a$ delar det ovan x -axeln belägna segmentet av kurvan $y = 4x - x^3$ i förhållandet 3 : 1 från origo räknat.

(Svar: $a = \sqrt{2}$)

2321. Bestäm

$$\lim \frac{\sqrt{x^3+2} - \sqrt{x^2+2} + \sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^3-1}},$$

när x ovanifrån obegränsat närmar sig 1.

(Ledning: Förkorta med $\sqrt{x-1}$.)

(Svar: -1)

2322. I triangeln ABC är I , I_a , I_b och I_c centra för den inskrivna respektive de vidskrivna cirklarna. Visa, att alla cirklarna II_aI_b , II_aI_c , II_bI_c , $I_aI_bI_c$ har radien $2R$.

2323. Sidan BC i triangeln ABC är given till längd ($= a$) och läge. Sök orten för punkterna A och H , om längden $AH = l$, där H är ortocentrum (höjdernas skärningspunkt)

(Svar: Med B i origo och BC som x -axel är orten cirkeln $x^2 + y^2 - ax \pm ly = 0$ med undantag av punkterna B och C)

2324. En triangel har ett hörn i origo, ett annat i punkten $(\pi; 0)$. Det tredje hörnet är $(x; \sin x)$. Bestäm ordinatan y för ortocentrum H och sök $\lim_{x \rightarrow 0} y_H$.

(Svar: $x(\pi - x) : \sin x$; gränsvärdet är π)

2325. Sök ekvationen för en tangent till kurvan $y^2 = x^3$ med vinkelkoefficienten k .

(Svar: $y = kx - \frac{4}{27}k^3$)

- 2326.** En triangel har ett hörn i origo, ett annat i punkten $(3; 0)$ och det tredje på kurvan $y = 1 - x^2$. Sök och konstruera orten för höjdernas skärningspunkt.
(Svar: Kurvan $y = (x^2 - 3x) : (x^2 - 1)$ med asymptoterna $x = \pm 1$; $y = 1$. Max. och min. saknas)

Tredje häftet

- 2327.** I varje fyrhörning med given omkrets, givna vinklar och maximiya kan en cirkel inskrivas. (X.)
- 2328.** I vissa trianglar är $\sqrt{\cot A} = \sqrt{\cot B} + \sqrt{\cot C}$. I en sådan är α , β och γ sidor i de inskrivna kvadrater som har en sida på a , b och c respektive. Visa, att $a : \alpha + b : \beta + c : \gamma = 7$. (V. Thébault.)
- 2329.** Medelpunkten till en cirkel (C) med radien r beskriver x -axeln och tangenten i P går genom origo. Visa, att den yta som ligger mellan orten för P och dess asymptoter är lika med ytan av cirkeln. (Efter Huygens.)

Enklare matematiska uppgifter

- 2330.** I en geometrisk serie är den första termen t_1 och den n :te t_n . Visa, att produkten av de n första termernas kvadrater är $(t_1 t_n)^n$.
- 2331.** I en likbent triangel är den omskrivna cirkelns radie medelproportional till basen och en av de lika sidorna. Bestäm toppvinkeln.
(Svar: $14,60^\circ$ eller $137,00^\circ$. – Om toppvinkeln är 2ν , erhålles $\sin \nu - \sin^2 \nu = 0,125$, som löst grafiskt ger $\sin \nu = 0,1271$ och $\sin \nu = 0,9304$. Eller: Sätt $\sin \nu = 2 \sin t : \sqrt{3}$)
- 2332.** De ovanför x -axeln belägna segmenten av parabeln $4y = 4 - x^2$ och cirkeln genom punkterna $(2; 0)$; $(-2; 0)$ och $(0; 1)$ får rotera kring y -axeln. Bestäm förhållandet mellan volymerna av rotationskropparna.
(Svar: $12 : 13$)
- 2333.** Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} (1 + e^{\frac{1}{x}})$ då x går monotont mot 0.
(Svar: 1 eller 0, allteftersom x går mot 0 genom positiva eller negativa värden)
- 2334.** På kurvan $y = 2x : (1 + x^2)$ är A och B den i första kvadranten belägna maximipunkten respektive inflexionspunkten och A_1 och B_1 deras projektioner på x -axeln. Visa, att linjen AA_1 halverar det slutna området som begränsas av kurvan, x -axeln och linjen BB_1 .

- 2335.** Punkterna $A(a; 0)$ och $B(b; 0)$ i ett rätvinkligt axelsystem har projektionerna A_1 respektive B_1 på en rörlig linje genom origo. Sök orten för mittpunkten av sträckan A_1B_1 .
(Svar: Cirkeln $2x^2 + 2y^2 - (a + b)x = 0$)
- 2336.** En parabel tangerar y -axeln i vertex och går genom punkten $(a; 0)$. Sök orten för parabelns fokus.
(Svar: Parabeln $y^2 = 4ax$ bortsett från origo)
- 2337.** I en triangel är en vinkel ν och den motstående sidan medelproportional till de övriga sidorna. För vilka värden på ν är uppgiften möjlig?
(Svar: $0^\circ < \nu \leq 60^\circ$)
- 2338.** Två ordinator på en längdenhets avstånd från varandra begränsar jämte x -axeln och kurvan $y = 15 - 3x^2$ en yta av 8 ytenheter. Bestäm ordinatornas ekvationer.
(Svar: $x = 1$ och $x = 2$ eller $x = -2$ och $x = -1$)
- 2339.** Bestäm den minsta sektoryta, som begränsas av x -axeln, linjen $3y = 2x$ och ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 72$.
(Svar: $1, 5\pi$ ytenheter)
- 2340.** I triangelarna ABC och ABD ligger C och D lika långt från basen AB åt var sin sida. Linjerna AB och CD råkas i E , där normalen n mot AB drages. Visa, att de sträckor som avgränsas av n av 1) höjderna från A 2) höjderna från B i de båda utgångstriangelarna är lika långa.

Fjärde häftet

- 2341.** Till en given rät linje drages normalerna i A och B på avståndet 1 längdenhet. På normalerna avsättes åt samma håll $AA_1 = p^3$ och $BB_1 = p$ längdenheter. Sök orten för skärningspunkten mellan AB_1 och BA_1 , när p varierar. (X.)
- 2342.** En cirkel med centrum i C går genom fokus F , vertex A i en parabel och kurvpunkten B . Sök ett samband mellan ytorna av triangeln AFC och parabelsektorn AFB . (Efter Newton.)
- 2343.** Punkterna A, B, C och D ligger i denna ordning på en cirkel. Visa, att centra för de i triangelarna ABC, BCD, CDA och DAB inskrivna cirkelarna utgör hörn i en rektangel. (V. Thébault.)

Enklare matematiska uppgifter

- 2344.** I en likbent triangel är basen medelproportional till de in- och omskrivna cirkelnas radier. Bestäm toppvinkeln.
(Svar: $12,90^\circ$)
- 2345.** Ett papper i form av en rätvinklig triangel med ytan $T \text{ cm}^2$ och en vinkel $22,5^\circ$ ligger på ett bord. Om papperet vikes utefter medianen mot hypotenusan, hur stor yta täckes då på bordet?
(Svar: $\frac{1}{2}T(3 - \sqrt{2}) \text{ cm}^2$)
- 2346.** Punkterna $A(a; 0)$, $A_1(-a; 0)$ och $B(0; b)$ är givna. En rörlig linje genom B skär linjerna $x = a$ och $x = -a$ i respektive P och P_1 . Linjerna AP_1 och A_1P råkas i Q . Visa, att ortocentrum för triangeln AQA_1 har konstant ordinata.
- 2347.** Om $f(x) = (x^4 + 1) : (x^2 + 1)$, så är $f'(\frac{1}{x}) + f'(x) = 2f(x) : x$
(Ledning: $x^2 f(\frac{1}{x}) = f(x)$. Derivera!
Om $f(x) = (x^4 + ax^2 + 1) : (x^2 + bx + 1)$ gäller samma relation.)
- 2348.** I den rätvinkliga triangeln ABC är AB och AC lika stora. En kvadrat $DEFG$ har hörnet D på sidan AB , E på AC och G på BC . Hur många procent av triangelns yta är kvadratens, då den är så liten som möjligt.
(Svar: 40%)
- 2349.** I ett klot försett med ett vanligt gradnät tänkes en regelbunden ikosaeder inskriven så, att ett hörn ligger i vardera polen. Bestäm de andra hörnens latituder.
(Svar: $26,565^\circ \text{ N}$ och S)
- 2350.** I en viss serie är $t_n = n : (n^4 + n^2 + 1)$. Visa, att

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2(n^2 + n + 1)}.$$

- 2351.** Bestäm konstanterna a , b , c och d i funktionen $y = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x-1}$ så, att den satisfierar ekvationen $\frac{dy}{dx} = 3,5x^3 : \sqrt{x-1}$.
(Svar: $a = 1$; $b = 1,2$; $c = 1,6$; $d = 3,2$)
- 2352.** Ett tal skrives med en etta åtföljd av ett antal nollor. Genom att sätta till en etta i början och utbyta den första nollan mot en etta får man ett nytt tal. Denna operation upprepas tills alla nollor är förbrukade. Visa, att summan av samtliga ifrågavarande tal är en jämn kvadrat.
(Svar: Kvadraten på det första talet, sedan alla dess nollor ersatts med ettor)