

## Årgång 48, 1965

### Första häftet

- 2505.** Låt  $M = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  vara en mängd med  $k$  element. Vidare betecknar  $M_1, M_2, \dots, M_n$  olika delmängder till  $M$ , alla bestående av tre element. Det gäller alltså att  $n \leq \binom{k}{3}$ . Man önskar dela  $M$  i två klasser, så att inte något  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ligger helt i den ena klassen. Visa att detta oberoende av  $k$  är möjligt om  $n \leq 6$  men inte alltid möjligt om  $n \geq 7$ . *(Nils Juringius.)*
- 2506.** Låt  $\{a_i\}_1^n$  vara en följd av positiva tal, sådana att  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  och  $\{b_i\}_1^n$  en följd av reella tal, sådana att  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Antag vidare att  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  är en godtycklig permutation av  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Visa att  $\sum_{i=1}^n b_i a_i \geq \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$ . *(Rudolf Tabbe.)*
- 2507.** Visa att varje funktion  $f$ , som satisfierar

$$f(x) + f(-x) = \frac{x}{2}(f'(x) - f'(-x))$$

är av formen  $f(x) = g(x) + ax^2$ , där  $g$  är en godtycklig deriverbar udda funktion och  $a$  en godtycklig konstant. *(M. L.)*

### Enklare matematiska uppgifter

- 2508.** Man väljer på måfå två punkter på en cirkels periferi. Beräkna sannolikheten, att punkternas avstånd från varandra är större än cirkelns radie.  
(Svar:  $2/3$ )
- 2509.** Två parallella linjer  $L_1$  och  $L_2$  är givna. På  $L_1$  ligger  $m$  st. olika punkter och på  $L_2$   $n$  st. Alla tänkbara linjer, som förenar de  $m$  och  $n$  punkterna dras. Beräkna antalet mellan  $L_1$  och  $L_2$  belägna skärningspunkter.  
(Svar:  $\frac{1}{4}m(m-1)n(n-1)$ )
- 2510.** Låt triangeln  $ABC$  vara inskriven i en cirkel med radien  $r$  och medelpunkten  $O$ . Höjden mot sidan  $BC = a$  betecknas  $h_a$  och  $k = a/h_a$ . Beräkna längden av den sträcka  $C_1B_1$ , som linjerna  $AB$  och  $AC$  avskär av normalen mot  $AO$  i  $O$ .  
(Svar:  $kr$ )
- 2511.** En ellips med excentriciteten  $e$  har medelpunkten  $M$  och ena brännpunkten  $F$ . En parabel har sin brännpunkt i  $F$  och sitt vertex i  $M$ . I vilket förhållande delar den gemensamma kordan ellipsens storaxel?  
(Svar:  $1 : e$ )

**2512.** På en fix sträcka  $AB$  ritas de trianglar  $ABC$ , i vilka medianerna  $AA_1$  och  $BB_1$  är vinkelräta. Vilken är den geometriska orten för  $C$ ?

(Svar: En cirkel med  $AB$ 's mittpunkt till medelpunkt och med diametern  $3AB$ , utom de punkter på cirkeln, vilka ligger på  $AB$ 's förlängningar)

**2513.** Låt  $A$ ,  $B$  och  $C$  i ordning vara punkter på en rät linje. Betrakta två cirklar med medelpunkt i  $B$  resp.  $C$ , vars gemensamma tangenter går genom  $A$ . Vad är geometriska orten för dessa cirklars skärningspunkter?

(Svar: Om  $D$  är den punkt på  $BC$ , för vilken gäller  $BC : CD = AB : AC$ , så är orten den cirkel, som har  $AD$  till diameter)

**2514.** Visa att om  $x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$  har tre reella negativa rötter, så gäller  $a \leq 3$  och  $b \leq 1$ .

**2515.** Visa att ekvationen

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n = 0$$

har exakt en reell rot, om  $n$  är udda, och ingen reell rot, om  $n$  är jämnt.

**2516.** Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara rationella tal. Visa att om  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$  och  $abc$  är hela tal, så är också  $a$ ,  $b$  och  $c$  hela.

## Andra häftet

**2517.** Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara tre naturliga tal, vilka ej bildar aritmetisk serie. Antag vidare att  $a + b + c$  är delbart med 3. Visa då att  $a^2 + b^2 + c^2$  även på ett annat sätt kan skrivas som summan av tre heltalskvadrater.

**2518.** För vilka naturliga tal  $n$  gäller att  $\sum_{m=1}^n (N+m)^2$  är delbart med  $n$  för varje heltal  $N$ ?

**2519.** Funktionen  $f$  är två gånger deriverbar i intervallet  $[0, 1]$ . Visa att  $f(0) = f(1)$  och  $|f''(x)| \leq M$  medför  $|f'(x)| \leq M/2$ .

## Enklare matematiska uppgifter

**2520.** Sannolikheten att en viss bilfirma säljer åtminstone tre bilar under en dag är 0,7, och sannolikheten att man under samma tid säljer mindre än sex bilar är 0,6. Vad är sannolikheten att man säljer 3, 4 eller 5 bilar under en dag?

(Svar: 0,3)

- 2521.** Vid en hålkortsbearbetning av ett statistiskt material skall en tjänsteman på varje kort i var och en av fem kolumner göra en markering. Eventuella felmarkeringar sker oberoende av varandra. Sannolikheten att han markerar fel i en kolumn är alltid 0,2. Vad är sannolikheten att han markerar fel i högst två av ett korts kolumner?  
(Svar: 0,942)
- 2522.** En svarv i en fabrik justeras, sedan den två gånger i följd tillverkat defekta enheter. Sannolikheten att maskinen tillverkar en defekt enhet är 0,1. Händelserna att olika tillverkade enheter är defekta kan anses som oberoende. Bestäm sannolikheten att maskinen justeras första gången, sedan man tillverkat exakt 4 enheter.  
(Svar: 0,009)
- 2523.** Låt  $DA$  vara mängden av alla delmängder till en mängd  $A$ . Visa att
- $D(A \cap B) = DA \cap DB$
  - $D(A \cup B) \supseteq DA \cup DB$
- 2524.** Låt  $A \triangle B$  vara den symmetriska differensen till två mängder  $A$  och  $B$ , dvs mängden av de element, som tillhör exakt en av mängderna  $A$  och  $B$ . Visa att
- $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
  - ekvationen  $A \triangle X = B$  har exakt en lösning.
- 2525.** Funktionen  $f$  är definierad för alla reella argument. Vidare gäller för alla  $x$  att  $f(x) \leq x \leq f(x^2 - x + 1)$ . Beräkna  $f'(1)$ .  
(Svar:  $f'(1) = 1$ )
- 2526.** Funktionen  $f$  är definierad i intervallet  $[a, b]$ . Vidare gäller att  $f(a) = f(b) = 0$ . Visa att ekvationen  $f'(x) = K[f(x)]^2$  för varje reellt  $K$  har minst en lösning  $x_1$ , vilken uppfyller  $a < x_1 < b$ . (Ledning: Studera  $h(x) = f(x)e^{g(x)}$ , där  $g$  är någon lämplig deriverbar funktion.)
- 2527.** Beräkna  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2$ .  
(Svar:  $(n+1)n \cdot 2^{n-2}$ )
- 2528.** Triangeln  $ABC$  är symmetrisk kring  $x$ -axeln i ett rätvinkligt system. Sidorna  $AB$ ,  $BC$  och  $CA$  tangerar hyperbeln  $x^2 - y^2 = 1$  i punkterna  $C'$ ,  $A'$  resp.  $B'$ , så att linjerna  $AA'$ ,  $BB'$  och  $CC'$  är parallella. Bestäm hörnen  $A$ ,  $B$  och  $C$ .  
(Svar:  $(\frac{1}{2}; 0)$ ,  $(-1; \sqrt{3})$ ,  $(-1; -\sqrt{3})$ )
- 2529.** Visa att en linje  $x = ky + l$  är tangent till parabeln  $y^2 = 2px$  om och endast om  $l = -\frac{1}{2}pk^2$ . Bestäm också tangeringspunkten för en given tangent på denna form.  
(Svar:  $(\frac{1}{2}pk^2, pk)$ )

## Tredje häftet

- 2530.** En professionell tennisspelare spelar under en längre tid omväxlande mot två amatörer  $A$  och  $B$ . Han har sannolikheten  $15/16$  att vinna mot  $A$  och sannolikheten  $9/10$  att vinna mot  $B$ . Vad är sannolikheten att  $B$  är den förste av de båda amatörerna, som slår den professionelle, om den professionelle börjar med att spela mot  $A$ ?
- 2531.** Antag att  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  är konvergent och att  $a_n \geq 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Sätt  $m_n = \max(a_n, a_{n+1})$ . Visa att  $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$  är konvergent. Visa också att slutsatsen är inte behöver gälla om villkoret  $a_n \geq 0$  slopas.
- 2532.** Visa att om  $f$  är kontinuerligt deriverbar och reell på intervallet  $[a, b]$  och  $f(a) = f(b) = 0$ , så finns något  $y$  i intervallet med

$$|f'(y)| \geq 4(b-a)^{-2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

## Enklare matematiska uppgifter

- 2533.** I golf slår  $A$  i genomsnitt  $B$  2 gånger av 5;  $A$  slår  $C$  5 gånger av 6;  $A$  slår  $D$  7 gånger av 10; och  $C$  slår  $D$  3 gånger av 8. För att vinna en turnering måste  $A$  först slå  $B$  och därefter segraren i en match mellan  $C$  och  $D$ . Vad är sannolikheten att  $A$  vinner?  
(Svar:  $3/10$ )
- 2534.** I ett gatunät, där kvarteren är kvadratiska, är  $A$  och  $B$  motsatta hörn i en kvadrat, som bildas av fyra kvarter. En person startar från  $A$  till  $B$  samtidigt som en annan person startar från  $B$  till  $A$ , varvid de går med samma konstanta hastighet. I ett gatuhörn väljer de alltid en sådan riktning, att de inte avlägsnar sig från målet. Om det finns två sådana riktningar, sker valet mellan dessa på måfå, så att sannolikheten för vardera riktningen är  $1/2$ . Sök sannolikheten för att de två personerna möts.  
(Svar:  $3/8$ )
- 2535.** Visa att om  $a$  är summan av två heltalskvadrater, så är också  $a^n$ ,  $n$  naturligt tal, summan av två heltalskvadrater.
- 2536.** För vilka reella  $A$  har ekvationssystemet

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= A \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= A \end{aligned} \right\}$$

reella lösningar?

(Svar:  $0 \leq A \leq n$ )

- 2537.** Är serien  $\sum_{v=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{v^2}\right)$  konvergent? Beräkna i så fall dess summa.  
(Svar: Ja.  $\log 0.5$ )
- 2538.** I ett rätvinkligt koordinatsystem med origo  $O$  har en parabel axeln parallell med  $y$ -axeln. Den skär  $x$ -axeln i  $A(a; 0)$  och  $B(na; 0)$  samt  $y$ -axeln i  $C(0; c)$ . Den har vertex i  $D$ . Punkterna  $C$  och  $D$  sammanbindes med en rät linje. Visa att för ett visst värde på  $n$ , men oberoende av värdet på  $a$ , följande ytor är lika stora: segmenten  $ABD$  och  $ACD$  samt den figur  $OAC$ , som begränsas av kurvbågen  $AC$  och koordinataxlarna. Vilket är värdet på  $n$  och hur stora är ytorna?  
(Svar:  $n = 3$ . Ytorna =  $\frac{4}{9}ac$ )
- 2539.** I en triangel  $ABC$  är vinkeln  $A$   $n$  gånger så stor som vinkeln  $B$ . Om sidan  $b$  har längden 1, mellan vilka gränser måste då längden av sidan  $a$  ligga?  
(Svar:  $1 < a < n$ )
- 2540.** Inuti en halvklotformig skål med plant lock lägges ett så stort klot som möjligt och runt detta ett antal mindre sinsemellan lika stora klot, samtliga tangerande det större klotet, skålen och locket. Hur många sådana mindre klot finns det plats för och hur stor del av skålens volym upptar alla kloten tillsammans?  
(Svar: 8 st.  $1/2$ )
- 2541.** I triangeln  $ABC$  tages på  $AB$  en punkt  $D$  på avståndet  $x$  från  $A$ .  $DE$  drages vinkelrät mot  $AB$ . Den skär  $BC$  i  $E$ .  $EF$  drages vinkelrät mot  $AC$ . Den träffar  $AC$  eller dess förlängning i  $F$ . Ytan av triangeln  $DEF$  är en funktion av  $x$ . Sök villkoret för att denna yta skall ha ett maximum för  $0 < x < c$ .  
(Svar:  $0 < \cos B < 2c/a$ )
- 2542.** Visa att talet  $\overline{xy\bar{z}}$  med siffrorna  $x$ ,  $y$  och  $z$  är delbart med 7 samtidigt som talet  $-x + 2y + 3z$  är det.

## Fjärde häftet

- 2543.** Ekvationen  $x^3 - ax^2 + bx - 8 = 0$  har endast reella positiva rötter. Vilket är det minsta värde, som  $a$  kan antaga för att detta skall vara möjligt?
- 2544.** Låt  $(a_m)_1^n$  vara reella tal med  $0 < a \leq a_m \leq A$ . Visa att

$$1 \leq \frac{n \sum a_m^2}{(\sum a_m)^2} \leq \frac{(A+a)^2}{4Aa}.$$

- 2545.** Kalla ett naturligt tal för en jämn potens om det har formen  $k^e$ , där  $k$  och  $e$  är naturliga tal,  $e \geq 2$ . Låt  $f(n)$  vara antalet jämna potenser bland talen  $1, 2, 3, \dots, n$ . Visa att man kan finna ett positivt tal  $a$  sådant att  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/n^a$  existerar och är ändligt och positivt.

## Enklare matematiska uppgifter

- 2546.** Låt  $f$  vara en funktion som är deriverbar på hela reella axeln. För  $x \neq 0$  gäller  $xf'(x) + 3f(x) \geq 2/x^2$ . Visa att  $f(x) \neq 0$  för  $x \neq 0$ . (Ledning: Betrakta funktionen  $x^3 f(x)$ ).
- 2547.** Visa att för alla naturliga tal  $n$  gäller att  $23^{2n+1} + 97^{2n+1}$  är delbart med 2, 3, 4, 5, 6 och 8 men inte med 7.
- 2548.** En ellips uppritas med vertices i en hyperbels foci och foci i hyperbelns vertices. Beräkna ellipsens och hyperbelns excentriciteter om förhållandet mellan hyperbelns parameter och den gemensamma kordan är  $\sqrt{5} : 1$ .  
(Svar:  $1/2$  resp.  $2$ )
- 2549.** Funktionen  $f$  är reellvärd och definierad för positiva argument. Vidare gäller för alla positiva  $x$  och  $y$  att  $xf(y) \leq f(xy)$ . Bestäm  $f$ .  
(Svar:  $f(x) = kx$ , där  $k$  är ett godtyckligt reellt tal)
- 2550.** För följderna  $(a_j)_1^\infty$  gäller att  $\lim_{j \rightarrow \infty} (a_j - a_{j-1})$  existerar ändligt  $= A$ .  
Visa att  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{j} = A$ .
- 2551.** Bestäm alla polynom  $P$  sådana att  $x[P'(x) + 2P'(2x)] = P(3x)$  för alla  $x$ .  
(Svar:  $P(x) = ax + bx^3$ , där  $a$  och  $b$  är godtyckliga)
- 2552.** Vad gäller för de reella talen  $a$  och  $b$  om

$$\left( \sqrt[3]{x^3 - ax^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2 + 1} \right) \rightarrow 1, \text{ då } x \rightarrow \infty?$$

(Svar:  $b - a = 3$ )

- 2553.** En korg innehåller 100 till synes likadana lökar. Av de 100 lökarna är 80 sådana att de, om de spirade, skulle ge gula tulpaner. De resterande 20 skulle ge röda tulpaner. Sannolikheten för att en lök med "gula anlag" spirar är 0,95 och för en lök med "röda anlag" är spiringssannolikheten 0,70. a) Vad är sannolikheten för att en på måfå vald lök skall spira? b) Om man vet att den spirar, vad är sannolikheten att den blir gul?  
(Svar: a) 0,90, b)  $76/90 \approx 0,844$ )

**2554.** Beräkna sannolikheten  $p(n)$  att av  $n$  personer (om vilka man vet att ingen är född på skottdagen) minst två har samma födelsedag. Hur stort måste  $n$  väljas för att denna sannolikhet skall överstiga 0,5?

(Svar:  $p(n) = 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (366-n)}{365^{n-1}}$ ,  $n \geq 23$ , ty  $p(22) = 0,474$  och  $p(23) = 0,507$ )