

# Årgång 67, 1984

## Första häftet

### Matematiska uppgifter

**3340.** a) Vilket av talen

$$A_2 = 1984(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1984^2)$$

och

$$B_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 1984^3$$

är störst?

b) Vilket av talen

$$A_{1/2} = 1984(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{1984})$$

och

$$B_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1984^2$$

är störst?

**3341.** Visa att  $(1 - x)^p \leq 1 - x^p$  för  $p \geq 1$  och  $0 \leq x \leq 1$ .

**3342.** Antag att  $a$  och  $b$  är reella tal med  $a + b = 1$  och  $a^3 + b^3 = 3$ . Beräkna värdet av  $a^2 + b^2$ .

**3343.** Det sexsiffriga talet  $abcdef$  är jämnt delbart med 1001. Gäller detta också talet  $fabcde$  som man får genom att placera sista siffran först?

**3344.** I en triangel  $ABC$  är vinkeln  $C$  rät. Punkterna  $D$  och  $E$  delar hypotenusan  $AB$  i tre lika långa delar.  $CD$  och  $CE$  har längderna  $\sin x$  resp  $\cos x$  för en viss vinkel  $x$  med  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Hur lång är hypotenusan i triangeln?

**3345.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(y+z) = 5 \\ y(x+z) = 8 \\ z(x+y) = 9. \end{cases}$$

**3346.** Visa att det finns oändligt många heltalslösningar till ekvationen

$$\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = \sqrt{7}.$$

**3347.** Låt  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och  $d$  vara positiva tal vars summa är  $S$ . Visa att

$$ab + bc + cd \leq S^2/4.$$

- 3348.** Låt  $a_0, a_1, a_2, \dots$  vara den  $s$  k fibonacciföljden där  $a_0 = a_1 = 1$  och  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  för  $n \geq 2$ . Beräkna summan av serien

$$1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \dots$$

- 3349.** Funktionen  $f$  har kontinuerlig derivata för  $x \geq 0$ . Visa att om  $xf'(x) + f(x) \geq x$  för  $x \geq 0$  så saknar ekvationen  $f(x) = x/4$  positiva rötter.

## Andra häftet

### Matematiska uppgifter

- 3350.** Två identiska kar är fyllda med alkohollösningar. I det ena karet finns  $p$  liter alkohol på varje liter vatten och i det andra  $q$  liter alkohol på varje liter vatten. Om innehållet i de båda karen blandas i ett stort kar hur stort blir då förhållandet mellan mängden alkohol och mängden vatten?
- 3351.** För vilka värden på konstanten  $a$  har ekvationerna  $x^2 + ax + 1 = 0$  och  $x^2 - x - a = 0$  någon gemensam rot?
- 3352.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{5}{y-2} = 1 \\ \frac{1}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 2 \end{cases}$$

- 3353.** För vilka värden på konstanten  $a$  har ekvationen  $\sqrt[3]{x} + a = x + \sqrt[3]{a}$  tre olika reella rötter?
- 3354.** Beräkna summan  $132 + 1332 + 13332 + \dots + 1333\dots32$ , där det sista talet innehåller  $n$  st treor.
- 3355.** Visa att om  $x \geq 0$  och  $r \geq 1$ , olikheten

$$\frac{1}{2}(1-x)(1+x^r) \geq \frac{1-x^{r+1}}{r+1}$$

gäller.

- 3356.** Visa att  $\sqrt[n]{m+2} - \sqrt[n]{m} \geq \sqrt[n]{m} - \sqrt[n]{m-1}$  gäller för alla positiva heltal  $n$  och  $m \geq 2$ .

- 3357.** Hur stor är sannolikheten att en punkt som slumpmässigt placeras innanför en kvadrat inte har längre avstånd än kvadratens sidolängd till något av kvadratens hörn?
- 3358.** Vilket är det minsta värde man kan få då man dividerar ett tresiffrigt tal (i basen tio) med summan av talets tre siffror?
- 3359.** Antag att  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  och  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ . Låt vidare talen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  vara en omordning av talen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Visa att

$$\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2.$$

## Tredje häftet

### Matematiska uppgifter

- 3360.** I en utslagsturnering i tennis deltar 32 olika duktiga spelare. Antag att en starkare spelare alltid vinner över en svagare. Hur stor är då sannolikheten att de två bästa möts i finalen, om matchprogrammet görs upp genom lottning?
- 3361.** Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara reella tal mellan 0 och 1. Är det då sant att  $(1 - c) \leq (1 - a)(1 - b)$  leder till  $(1 - c^2) \leq (1 - a^2)(1 - b^2)$ ?
- 3362.** En aritmetisk talföljd består av de udda heltalen fr o m 5. Beräkna summan av serien  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/s_n$  där  $s_n$  är summan av de  $n$  första elementen i talföljden.
- 3363.**  $z$  är ett komplext tal med  $|z| \leq 1$ . Visa att realdelen  $r$  av det komplexa talet  $z/(1 - z)$  uppfyller  $r > -1/2$ .
- 3364.** Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + z = 35 \\ x + u = 27 \\ y + z = 15 \\ xu = yz \end{cases}$$

- 3365.** En remsa av papper har formen av en rektangel med sidorna 2 cm och 10 cm. Är det möjligt att med hjälp av två raka klipp med en sax dela remsan i delar, som kan hopfogas till en kvadrat?
- 3366.** Man kastar ett symmetriskt mynt, tills man har fått krona följd av klave eller klave följd av krona. Bestäm sannolikheten att det behövs precis  $k$  kast.

**3367.** Lös ekvationen  $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 1/2$  och ge svaret i så enkel form som möjligt.

**3368.** Går det att finna tre sådana tal  $a_1$ ,  $a_2$  och  $a_3$  att

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x > 0$$

för alla reella tal  $x$ ?

**3369.** Visa att

$$(x-y)(x-z)x^a + (y-x)(y-z)y^a + (z-x)(z-y)z^a \geq 0$$

gäller för alla reella tal  $a$ , om  $x$ ,  $y$  och  $z$  är reella positiva tal.

## Fjärde häftet

### Matematiska uppgifter

**3370.** Tore är 30 år äldre än Sven. Om åtta år är Tore dubbelt så gammal som Sven. Hur gammal är Sven nu?

**3371.** Förenkla uttrycket  $a^{\lg(\lg a)/\lg a}$  så långt som möjligt.

**3372.** Låt  $A$ ,  $B$ ,  $C$  och  $D$  vara fyra punkter i rummet. Visa att

$$|AC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 \geq |AB|^2 + |CD|^2$$

(med  $|PQ|$  menas avståndet mellan de två punkterna  $P$  och  $Q$ ).

**3373.** Låt  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vara ett statistiskt material med stickprovsmedelvärdet  $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$  och stickprovsvariansen  $s_n^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_n)/(n-1)$ .

Visa att om vi utökar materialet med ytterligare ett värde,  $x_{n+1}$ , så blir

$$\bar{x}_{n+1} = (n\bar{x}_n + x_{n+1})/(n+1)$$

och

$$s_{n+1}^2 = \frac{n-1}{n} s_n^2 + \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - \bar{x}_n)^2.$$

**3374.** Visa att ett av de fyra värdena av  $(2+i)^{1/2} + (2-i)^{1/2}$  är lika med  $\sqrt{2\sqrt{5}+4}$ .

**3375.** I nedanstående divisionsuppställning betecknar olika bokstäver olika siffror. Hur ser divisionen ut med de korrekta siffrorna?

