

## Årgång 69, 1986

### Första häftet

### Matematiska uppgifter

**3420.** Två ljus av samma längd är gjorda av olika material så att brinntiden är olika. Det ena brinner upp på tre timmar och det andra på fyra timmar. När ska ljusen tändas om man vill att det ena ljuset ska vara dubbelt så långt som det andra kl 20.00?

**3421.** Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^4 \\ y^{x+y} = x. \end{cases}$$

**3422.** Visa att för varje heltal  $n > 1$  ekvationen

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{1+x} + \frac{3}{2+x^2} + \frac{4}{3+x^3} + \dots + \frac{n+1}{n+x^n} = n$$

har en reell rot mellan 1 och 2.

**3423.** I en urna ligger två vita och tre röda kulor.

- Man drar en kula slumpmässigt. Hur stor är sannolikheten att kulan är vit?
- Man drar en kula i taget slumpmässigt utan återläggning tills man får en vit kula. Sedan drar man ytterligare en kula. Hur stor är sannolikheten att även den är vit?

**3424.** Är talet 11111...11 som består av 1986 st ettor ett primtal?

**3425.** Beräkna  $\sqrt{9604000196000001}$ .

**3426.** Visa att

$$x^3 + y^3 \leq x^3 \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + y^3 \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

för alla  $x > 0$  och  $y > 0$ .

**3427.** Visa att olikheten

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

är sann för alla val av  $x_1, x_2, \dots, x_n$  med  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  om och endast om  $\sum_{j=1}^k a_j \geq \sum_{j=1}^k b_j$  för  $k = 1, 2, \dots, n-1$  och  $\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n b_j$ .

3428. Visa att

$$\frac{yz}{(y+z)^2} + \frac{zx}{(z+x)^2} + \frac{xy}{(x+y)^2} \geq \frac{6xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}$$

för alla positiva  $x$ ,  $y$  och  $z$ .

3429. En regelbunden  $n$ -hörning  $A_1 A_2 \dots A_n$  är inskriven i enhetscirkeln. Beräkna produkten av längderna av  $A_1 A_2$ ,  $A_1 A_3$ ,  $\dots$ ,  $A_1 A_n$ .

## Andra häftet

### Matematiska uppgifter

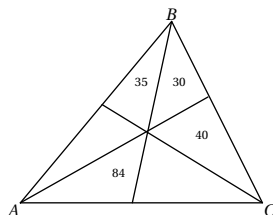
3430. I en geometrisk serie är summan av de två första termerna 9, medan summan av de sex första termerna är 279. Bestäm summan av de fyra första termerna.

3431. I ett samhälle finns 500 gifta par. Två tredjedelar av de män som är äldre än sina fruar är också längre än dessa, medan tre fjärdedelar av de män som är längre än sina fruar är äldre än dessa. Om det är 60 fruar som är både äldre och längre än sina män, hur många män är då både äldre och längre än sina fruar? Vi förutsätter att det inte finns något par där makarna är exakt lika i ålder och längd.

3432. Bestäm alla lösningar till ekvationen  $4^{x+1} + 4 = 2^{x+4} + 2^x$ .

3433. Tre cirklar  $C_1$ ,  $C_2$  och  $C_3$ , alla med radie 5 cm, har sina medelpunkter på samma räta linje, så att  $C_2$  tangerar såväl  $C_1$  som  $C_3$  utvändigt. Nämda linje skär  $C_1$ , dels i tangeringspunkten med  $C_2$ , dels i punkten  $G$ . Drag en tangent till  $C_3$  genom  $G$ . Den skär  $C_2$  i punkterna  $A$  och  $B$ . Bestäm längden av kordan  $AB$ .

3434. Enligt figuren är triangeln  $ABC$  indelad i sex deltrianglar med linjer dragna från hörnen genom en gemensam inre punkt. I figuren är areorna av fyra deltrianglar angivna. Bestäm arean av triangeln  $ABC$ .



3435. Låt  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  vara sådana positiva heltal att  $a^5 = b^4$ ,  $c^3 = d^2$ ,  $c - a = 19$ . Bestäm  $d - b$ .

3436. Tre personer, A, B och C, spelar tennis en dag. Efter varje match byts förloraren ut mot den spelare som stått över.

- a) Vid dagens slut har A spelat 10 matcher medan B har spelat 21. Hur många matcher har C spelat?

- b) En annan dag har A spelat 10 matcher, B 15 och C 17. Vem förlorade match nr 2?
- 3437.** Visa att  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$  för varje naturligt tal  $n > 1$ .
- 3438.** Romeo och Julia går varandra till mötes längs ett järnvägsspår. Precis kl 12 hinner ett godståg upp Romeo och behöver sedan 10 sekunder för att passera honom. Kl 12.05 (exakt) möter tåget Julia och passerar henne på 8 sekunder. Hur mycket är klockan när Romeo och Julia möts? Antag konstanta hastigheter för såväl tåg som personer.
- 3439.** Betrakta 0-1-sviter av längd  $n$  i vilka första siffran är 1, sista är 0 och kombinationen 01 förekommer  $m$  gånger. Visa att det finns  $\binom{n-1}{2m+1}$  sådana sviter. Hur många sviter finns det, om kraven på start- och slut-siffra slopas?

## Tredje häftet

### Matematiska uppgifter

- 3440.** Låt  $x_1 = 256$  och  $x_n = n/x_{n-1}$  för  $n > 1$ . Beräkna
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10}$
  - $x_{10}$ .
- 3441.** Lille Max adderar sidnumren i sin bok och får slutsumman 1986 (sidorna är numrerade  $1, 2, \dots, n$ ). Av misstag har han adderat ett visst nummer två gånger. Vilket är detta nummer?
- 3442.** Definiera för varje  $a$ ,  $0 \leq a \leq 6$ , funktionen  $f_a(x) = x + \frac{a}{x} - \frac{3a}{4}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ . För vilket  $a$ -värde är  $\min_{1 \leq x \leq 2} f_a(x)$  maximalt?
- 3443.** En bagare gör 100 lika stora bullar av en deg med 100 russin. För varje russin är sannolikheten  $1/100$  att hamna i en given bulle. Efter baket provsmakar bagaren en slumpvis vald bulle.
- Vad är sannolikheten att provbulle innehåller exakt ett russin?
  - Bagarens fem barn får var sin bulle. Vad är sannolikheten att ingen av dessa innehåller något russin?
- 3444.** Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara sådana positiva heltal att  $a \cdot b < c$ . Visa att  $a + b \leq c$ .

**3445.** Lös ekvationen

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = x$$

$$\text{b) } 8,1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x+4)^n} = 1.$$

**3446.** Beräkna (exakt)

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{8 + \sqrt{55}}}{\sqrt{7 + \sqrt{33}} + \sqrt{6 + \sqrt{35}}}.$$

**3447.** Visa att

$$x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720 > 0$$

för alla reella  $x$ .

**3448.** I fyrhörningen  $ABCD$  är vinklarna  $B$  och  $D$  båda räta. Vidare går bisektrisen till vinkeln  $B$  genom  $D$ , varvid  $BD = AB$ . Beräkna fyrhörningens omkrets om dess area är  $4 \text{ cm}^2$ .

**3449.** På sträckan  $AB$  utplaceras  $2n$  punkter parvis symmetriskt kring sträckans mittpunkt. Måla  $n$  godtyckligt valda punkter röda och de övriga  $n$  punkterna blå. Visa att summan av avstånden från de röda punkterna till  $A =$  summan av avstånden från de blå punkterna till  $B$ .

## Fjärde häftet

### Matematiska uppgifter

**3450.** I en rektangulär åker har man hittat en silverskatt. Avstånden från tre av hörnen till fyndplatsen har bestämts till 37 m, 78 m resp 82 m. Bestäm avståndet från det fjärde hörnet, om man vet att en av rektangelsidorna har längden 40 m.

**3451.** Lös ekvationssystemet

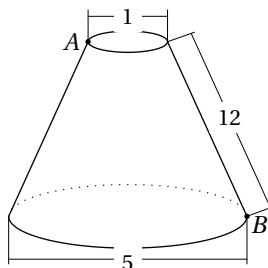
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3(x + y) \\ x^2 y^2 = 9. \end{cases}$$

**3452.** I en skola ökade antalet pojkar med 28% och antalet flickor med 62% under en femårsperiod. Detta medförde att den procentuella fördelningen mellan pojkar och flickor kastades om och blev den rakt motsatta. Med hur många procent ökade elevantalet under perioden?

**3453.** På en turistresa har resenärerna kommit överens om att placera ut sig i ett antal bussar, så att det blev lika många i varje buss. Man försökte först med 22 personer i varje buss, men då blev en person ensam i den sista bussen. Efter att ha plockat bort två bussar lyckades man dock lösa problemet utan att det lagstadgade maximiantalet passagerare per buss, 42, överskreds. Hur många resenärer var det totalt?

**3454.** I triangeln  $ABC$  är  $\angle ABC = 2 \cdot \angle CAB$  och  $AB = 2 \cdot BC$ . Visa att triangeln är rätvinklig.

**3455.** En upp- och nedvänd skål har formen av en stympad regelbunden kon med cirkelformad botten och öppning. Dimensionerna framgår av figuren (proportionerna kan vara något förvrängda). En fluga förflyttar sig från punkten  $A$  på bottenkanten till punkten  $B$  "diametralt" motsatt belägen på öppningskanten. Bestäm kortaste vägen för flugan om den endast kan förflytta sig längs skålens sidoyta. Blir svaret detsamma, om man inte har nämnda inskränkning?



**3456.** I ett laboratorium finns det 900 provrör med blod från lika många blodgivare. Ett av proven innehåller en sällsynt blodfaktor. Tyvärr har laboranten Laban glömt att markera detta och får därför i uppdrag att leta rätt på det speciella provröret. Han inser att om han analyserar provet ett och ett han i värsta fall kan tvingas göra 900 analyser. Laban får plötsligt en briljant idé. Han delar upp rören i  $k$  lika stora grupper. Inom varje grupp förfärdigar han en blandning av blod från samtliga prov. Sedan analyserar han blandningen. Om blodfaktorn påträffas, analyserar han samtliga enskilda prov i gruppen. I annat fall tar han itu med nästa grupp.

- Bestäm maximala antalet erforderliga analyser, om Laban väljer  $k$  på bästa sätt.
- Bestäm maximala antalet analyser, om Laban i stället för ovanstående 2-stegsförfarande använder en 3-stegsmodell.

**3457.** Vilket tal är störst,

$$8^{8^{\dots 8}} \quad (9 \text{ stycken } 8\text{:or}) \quad \text{eller} \quad 9^{9^{\dots 9}} \quad (8 \text{ stycken } 9\text{:or})?$$

**3458.** Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara reella tal  $> 1$ . Visa olikheten

$$4(abc + 1) > (a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

**3459.** Låt  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vara en permutation (= ordning) av talen  $1, 2, \dots, n$ .

- a) Visa att  $\sum_{i=1}^n |a_i - a_{i+1}| \geq 2n - 2$ , där  $a_{n+1} = a_1$ .
- b) Hur många permutationer ger likhet i a)?