

Årgång 72, 1989

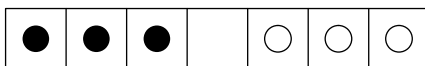
Första häftet

Matematiska uppgifter

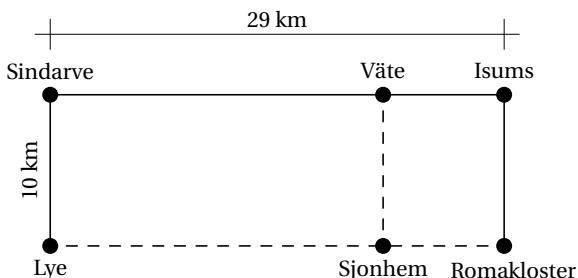
3540. Placera ut tre svarta och tre vita brickor på en spelplan bestående av sju rutor enligt figuren. Avsikten är att få de svarta brickorna att byta plats med de vita. Följande drag är därvid tillåtna:

Svarta brickor kan bara flyttas åt höger, vita brickor bara åt vänster. I varje drag flyttas en bricka (av godtycklig färg) till en fri ruta, antingen genom att flytta brickan ett steg eller genom att hoppa över en bricka av motsatt färg.

Inga andra drag är tillåtna. Hur många drag krävs?



3541. För några år sedan bodde jag i Lye på Gotland och gjorde dagliga bilturer till Sjonhem. I figuren nedan ges en schematisk bild av vägnätet. Jag hade flera färdmöjligheter. Jag kunde naturligtvis ta den närmaste vägen, men jag kunde också ta omvägar, t ex över Sindarve och Väte och sedan gena över till Sjonhem, eller också köra hela vägen runt via Isums och Romakloster. Det märkliga var att det tog lika lång tid vilken väg jag än valde. I hela området gällde vid tillfället hastighetsbegränsning, som var densamma för alla vägar dragna markerade med heldragen linje. På övriga vägar, i figuren markerade med streckade linjer, var hastigheten enhetligt nedsatt pga vägarbete. Bestäm kortaste avståndet mellan Lye och Sjonhem. Vi förutsätter att vägnätet är helt rektangulärt.



3542. Lös ekvationen

$$(x + 1)^2 + \sqrt{x}(2x + 1) = 43.$$

- 3543.** Låt $p(x) = ax^2 - bx + c$ vara ett polynom med heltalskoefficienter. Bestäm det minsta positiva heltalet a för vilket $p(x)$ har två olika rötter i intervallet $0 < x < 1$.
- 3544.** Ur en cirkel med radien r utskärs en sektor varefter man av återstoden bildar en kon. Hur stor ska sektorns medelpunktsvinkel vara för att konen ska få maximal volym?
- 3545.** Familjen Andersson brukar under sina semesterresor övernatta på hotell. Det är emellertid inte alltid som de lyckas få tag på ett trebäddsrum utan får då nöja sig med ett dubbelrum och ett enkelrum. Problemet är hur man på ett rättvist sätt avgör vem som ska ha enkelrummet. Visa att tvisten kan lösas genom slantsingling. Hur ska denna utföras för att alla tre ska ges samma chans till enkelrummet?
- 3546.** Betrakta ett n -siffrigt tal med idel olika siffror men där sista siffran inte får vara 0. När siffrorna läses i bakvänd ordning fås ett annat tal. Summan av dessa båda tal är $(n + 1)$ -siffrig och inleds med det senare talet. För vilka n är detta möjligt och vilka är då de ursprungliga talen?
- 3547.** En kub med sidan 2 är indelad i 4 småkuber med sidan 1. Kuben innehåller 27 rätblock (kontrollera detta) om hänsyn tas till såväl formen som läget i kuben. Hur många rätblock innehåller en kub med sidan 3? Med sidan 10?
- 3548.** En fyrhörning med sidorna 1, 2, 3, 4 (i denna ordning) är given. Visa att arean är maximal om hörnen ligger på en och samma cirkelperiferi. Ange maximiarean och motsvarande cirkels radie. Blir resultatet detsamma om sidorna kommer i annan ordning?
- 3549.** Inskriv de nio talen 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, i slumpmässig ordningsföljd i en kvadrat med 9 rutor. Bestäm sannolikheten att kvadratens rader och kolonner alla innehåller olika siffror.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

- 3550.** En gammal rysk fåraherde dog och lämnade sin fårahjord i arv till sina söner. Hjorden såldes för en summa rubler som visade sig vara en jämn kvadrat. Pengarna fördelades på så vis att bröderna i tur och ordning efter ålder tog tio rubel, om och om igen, till dess den yngste tog de sista slantarna – och klagade över att han fått

minst. Den äldste brodern tog då fram en pennkniv och sade: ”Tag den här, så blir det rättvist.”

Hur många var bröderna, och vad kostade pennkniven?

3551. Lös ekvationen

$$\log(3^{y-1} - 1) + \log(3^y - 6) = 1 - \log 3,$$

där \log betecknar 10-logaritmen.

3552. Beräkna produkten

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot \dots \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$$

där varje teckenkombination av $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5}$ förekommer exakt en gång.

3553. Framifrån räknat har ett 4-siffrigt tal sifferföljden

udda-jämn-udda-jämn.

Dess kvadrat och kub slutar båda med sifferföljden

jämn-udda-jämn-udda-jämn.

Vilket är talet?

3554. Beräkna gränsvärdet av $\sqrt[3]{x^9 + x^6} - x^3$, när $x \rightarrow \infty$.

3555. I en cirkel har kordan AB längden 3 cm, kordan AC längden 4 cm medan vinkeln BAC är 30° . Bisektrisen till nämnda vinkel skär cirkeln i punkten D . Beräkna längden av kordan AD samt cirkelns radie.

3556. Beräkna summan

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j+k}{2^{j+k}}.$$

3557. Betrakta mängden av alla punkter i det tredimensionella rummet med heltalskoordinater (enbart). Måla nio godtyckligt valda punkter blå och måla alla andra punkter i mängden röda. Visa att man alltid kan välja två blå punkter så att det på en rät linje mellan dessa punkter finns minst en punkt, röd eller blå.

3558. Hur många *olika* siffror har ett tiosiffrigt tal (i basen 10) i genomsnitt?

3559. Låt C_1 , C_2 och C_3 vara cirklar i det vanliga euklidiska rummet (\mathbf{R}^3). Antag att cirkelarna C_1 och C_2 skär varandra i två punkter och att C_1 och C_3 också skär varandra i två punkter. Vidare antas C_2 och C_3 skära varandra i åtminstone en punkt. Dessa fem punkter ska vara olika. Visa att C_2 och C_3 antingen tangerar varandra eller har ytterligare en gemensam punkt.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3560. Under en pågående bowlingtävling fick Lena 185 poäng i den senaste serien och höjde därmed sitt genomsnitt på gjorda serier från 176 till 177. Hur många poäng behöver Lena i nästa serie för att öka genomsnittet till 178?

3561. I ekvationen

$$(METM)^2 = ELEMENTA$$

står olika bokstäver för olika siffror. Vilka? Den som kan lösa problemet och beräkna summan av siffrorna i *ELEMENTA* får ett gammaldags stort *A*.

3562. I en likbent triangel är $AB = AC$. Vidare är basen BC 16 cm och höjden mot denna 8 cm. En rektangel $DEFG$ med omkretsen 40 cm har hörnen D och E på triangelbasen BC eller dess förlängning, så att mittpunkten på DE hamnar i höjdens fotpunkt. Ange arean av den utanför triangeln liggande delen av rektangeln $DEFG$ som funktion av $x =$ längden av sidan DE samt åskådliggör funktionen grafiskt.

3563. a) Visa att trean och femman kan byta plats i uttrycket $5^{\log_4 3}$ utan att dess värde förändras. Ange detta värde.
b) Förenkla uttrycket

$$\frac{\log_4 x + \log_{16} x + \log_{32} x}{\log_2 x - \log_8 x + \log_{64} x}$$

(\log_b anger logaritmen i basen b).

3564. Om $\sin x + \sin y = 1$ och $\cos x + \cos y = \sqrt{2}$, vad är $\tan x + \tan y$?

3565. Visa för $p \geq 1$ identiteterna

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{i=1}^p \frac{1}{\binom{p+i}{2}} = \frac{1}{p}, \\ \text{b) } & \sum_{i=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{i+1}}{\binom{2p}{i}} = \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

(för heltalen n och k , $n > 0$, $0 \leq k \leq n$ är $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ med $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

3566. En professor besökte tre affärer, 1, 2 och 3 i denna ordning och blev mer och mer tankspridd under promenadens lopp. Sannolikheten att han skulle glömma sitt paraply i affär 1 var $1/4$. Motsvarande sannolikheter för affärerna 2 och 3 var $1/3$ resp $1/2$. När han kom

hem saknade han paraplyet. Bestäm sannolikheten att han glömde det i affär 1, 2 resp 3.

- 3567.** Betrakta en cirkel med medelpunkt O och en diameter AB . Från A dras en rät linje som skär cirkelperiferin i punkten C och tangenten genom B i punkten D . På förlängningen av sträckan BC över C avsätts punkten E så att $BE = BD$. Genom E dras en linje parallell med AB . Linjen skär sträckan AD i punkten M . Ange den geometriska orten för punkten M när punkten C genomlöper möjliga lägen.
- 3568.** Den reellvärda funktionen $F(x)$ är definierad för alla reella x utom för $x = 0$ och $x = 1$. Vidare gäller det att $F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$. Bestäm $F(x)$.
- 3569.** Låt a_1, a_2, \dots, a_n och b_1, b_2, \dots, b_n vara två permutationer (= ordningar) av talen $1, 2, \dots, n, n \geq 2$. Bilda

$$S = \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$

Ange minimum och maximum av S under bivillkoret att $a_k \neq b_k$ för varje k . Förändras maximivärdet om bivillkoret slopas?

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

- 3570.** I en addition med två termer och deras summa, alla positiva heltal, är samtliga tio siffror representerade. Vilken är den minsta möjliga summan?
- 3571.** I kvadraten $ABCD$ har varje hörn förenats med en punkt P i kvadraten med en rät linje. Man vet att $\angle APB = 150^\circ$ och att $|AP| = |BP|$. Bestäm vinkeln CPD .
- 3572.** Lös ekvationen

$$\sum_{x=4}^y x \cdot 2^{x-3} = 524284.$$

- 3573.** Från punkten A med koordinaterna $(5, 6)$ i det euklidiska planet dras en linje till en punkt B i den tredje kvadranten. Sträckan AB delas av koordinataxlarna i förhållandet $2 : 3 : 4$ från A räknat. Beräkna koordinaterna för punkten B .

3574. Ada går från Liseberg till Chalmers med konstant hastighet och Kal från Chalmers till Liseberg likaledes med konstant hastighet. Ada gör promenaden på 20 minuter medan Kal behöver 30 minuter. (Kal har nyligen fått en tå opererad på Sahlgrenska.) Om Ada och Kal oberoende av varandra väljer starttider mellan klockan 5 och 6, vad är sannolikheten att de råkas under promenaden?

3575. Visa att om a och n är positiva hela tal med $a \leq n$, så gäller att

$$1 + \frac{n-a}{n-1} + \frac{(n-a)(n-a-1)}{(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{(n-a)(n-a-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot a} = \frac{n}{a}.$$

3576. I en Monty Python-sketch förvirras varuhuskunder av två expediter som genomgående förvränger alla sifferuppgifter. En säng som har längden 180 cm uppges vara 60 cm lång av den ena expediten och 18 m av den andre. Skärskådar man utsagorna är det emellertid något som inte stämmer. Om replikerna renodlas gör nämligen expediterna, här kallade A och B, följande påståenden:

A: "alla tal som B uppger måste divideras med 10";

B: "Alla tal som A uppger måste multipliceras med 3".

Om A och B är konsekventa bör även värdena 10 och 3 vara förvrängda. Antag att A genomgående multiplicerar alla tal med en viss faktor och att B gör detsamma med en viss annan faktor. Vilka bör dessa faktorer vara för att ovanstående utsagor ska vara förenliga? Hur bör påståendena alltså lyda om de utsägs av en "neutral" person?

3577. a) Med hur många nollor slutar talet 1989! ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)?
b) Vilken är den första siffran från slutet räknat i talet 100! som är skild från noll?

3578. Vid en nordisk rundabordskonferens är de 80 deltagarna placerade kring bordet så att varannan deltagare tillhör den norsk-svenska falangen och varannan den dansk-finska. Vidare är varje dansk omgiven av två norrman eller av två svenskar medan varje finländare har en norrman och en svensk på var sin sida.

a) En av konferensdeltagarna påstår att det är 10 fler danskar än finländare närvarande. Visa att detta påstående inte kan vara riktigt.

b) Antag att det är lika många danskar som finländare. Hur många svenskar kan det vara som mest resp som minst?

3579. Sätt $b_n = 0,999\dots 9777\dots 7$, där n stycken nior följs av n stycken sjuor. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{10^n}$$