Årgång 79, 1996

Första häftet

3820. a) Alice äger tre hus, här betecknade A, B och C. Hon bor i ett av husen och hyr ut de båda andra. På varje entrédörr finns en liten tavla för meddelanden till besökare. I förra veckan kunde man läsa följande notiser:

Hus A: Alice bor inte här. Hon har semester denna vecka.
Hus B: Alice bor inte i hus A. Hon arbetar denna vecka.
Hus C: Alice bor inte här. Hon bor i hus B.

Uppenbarligen kan inte alla påståenden vara sanna. I vilket hus bor Alice om man vet att högst ett meddelande på varje dörr är falskt?

b) Innevarande vecka har texterna ändrats något:

Hus A: Alice bor inte här. Hon bor i hus B.
Hus B: Alice bor inte i hus A. Hon bor i hus C.
Hus C: Alice bor inte här. Hon bor i hus A.

I detta fall vet man att på en dörr är båda påståendena sanna, på en annan är båda påståendena falska och på den tredje är ett påstående sant och ett falskt. I vilket hus bor Alice denna vecka?

3821. Betrakta talföljden

$$1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

Vilket tal uppträder som nr 650? Som nr 100 000?

3822. Noa och hans fru Hanna har tre barn: Sem, Ham och Jafet. Hanna är tre år yngre än Noa. Första siffran i Noas ålder anger Sems ålder, medan andra siffran anger Hams ålder. Jafet är lika gammal som Sem och Ham tillsammans. Alla förekommande åldrar är olika heltal. Summan av de fem åldrarna är kvadraten på ett heltal. Hur gamla är de fem familjemedlemmarna?

3823. I triangeln ABC är vinkeln B 75°. En linje genom A skär sidan BC i punkten D så att $|BD| = 2 \cdot |DC|$ och $\angle ADB = 60°$. Bestäm vinklarna i triangeln ABC.

3824. Robyn har i slöjden gjort ett ”schackbräde” med 8×8 rutor. På måfå målar hon vissa rutor svarta och de övriga rutorna vita. Hon utför sedan följande sifferlek: I varje vit ruta tecknar hon ett tal som anger totala antalet svarta rutor i samma rad och kolonn som den vita. I varje svart ruta noterar hon motsvarande antal vita rutor. På ett riktigt schackbräde skulle det stå talet 8 i samtliga rutor.

Robyn adderar talen i de vita rutorna och får summan 50. Intressant nog blir summan densamma när hon adderar talen i de svarta rutorna. Är detta en slump eller blir summorna alltid lika? Hur många rutor är svarta om man vet att det är färre svarta än vita rutor?

3825. Visa olikheterna

$$2\sqrt{x+y} \le \sqrt{(x+y)^2+4} \le \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$$

för positiva tal x och y.

När gäller likhet?

3826. Om fem personer hälsar på varandra utväxlas tio handslag. Om personerna bara utväxlar fyra handslag valda slumpmässigt bland de tio, hur stor är då sannolikheten att varje person hälsar på minst en annan?

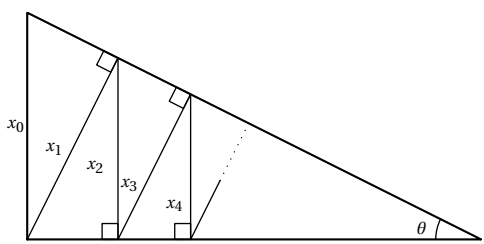
3827. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3-y^3-z^3-u^3 = 8xyzu \\ x^2 = 3(y+z+u) \end{cases}$$

i positiva heltal x, y, z,u.

3828. Bestäm det minsta positiva heltal n för vilket $(2^{69}+3^{70})^{71}+n$ är jämnt delbart med 72?

3829. I en rätvinklig triangel med given bas = 1 dras ”höjder” i all oändlighet så att en sicksacklinje bildas som figuren visar. Vi betecknar linjestyckenas längder med x_0, x_1, x_2, … och bildar summan $S(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$ som beror av basvinkeln θ. Bestäm θ så att $S(\theta)$ blir minimal. Vilket värde har då $\cos\theta$?



Andra häftet

3830. I parallelltrapetset $ABCD$, där sidorna AB och DC är parallella är $|BD| = 24$ cm, $\angle BDC = 45°$ och $\angle ACD = 30°$. Bestäm trapetsets area.

3831. Serien $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ är given. Man bildar en ny serie $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m$ sådan att

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= a^2 \cdot a^3 \\ t_3 &= a^4 \cdot a^5 \cdot a^6 \\ &\vdots \\ t_m &= a^{n-m+1} \cdot a^{n-m+2} \cdot \ldots \cdot a^n \end{aligned}$$

Vilket samband råder mellan n och m? Uttryck t_m på så enkel form som möjligt.

3832. Bagare Brun bakar bara en sorts bullar och en sorts bakelser. Båda bakverken säljer han till konstant pris i hela kronor. Man vet att 140 bullar kostar mer än 20 bakelser men mindre än 21 bakelser. Visa att en bulle och en bakelse tillsammans kostar mer än 30 kr.

3833. a) Bestäm det minsta positiva heltal n för vilket $2n$ är en heltalskvadrat och $3n$ en heltalskub.

b) Samma uppgift som i a) men nu med villkoren att $2n$ och $5n$ ska vara kvadrat respektive femtepotens av heltal.

3834. Bestäm heltalet m så att lösningarna till $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$ utgör en aritmetisk serie.

3835. I en brottningsturnering där alla mötte alla lyckades samtliga deltagare vinna åtminstone en match (en match kan inte sluta oavgjord). Låt a_k vara antalet deltagare med minst k segrar. Visa att $a_1 + a_2 + \cdots =$ totala antalet matcher. Vilka av de givna förutsättningarna är nödvändiga för att likhet skall gälla?

3836. a) Beräkna summan

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{49}{50!}$$

där $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

b) Beräkna summan

$$\frac{1}{3!} + \frac{5}{4!} + \frac{11}{5!} + \frac{2351}{50!}$$

där enskilda termer är på formen $\dfrac{(k-1)(k-2)-1}{k!}$.

3837. Inuti triangeln ABC väljs en punkt P. Man drar linjer från hörnen genom P. Därvid uppdelas triangelns sidor i sträckorna AD, DB,

BE, EC, CF och FA. Man vill bilda två rätvinkliga askar och väljer tre av de sex sträckorna som längd, bredd och höjd i den ena asken och de återstående sträckorna som längd, bredd och höjd i den andra. Visa att det går att välja sträckorna så att askarna får samma volym. Hur kan detta göras?

3838. Katten Murre ska gå uppför en stege med fem pinnar. I varje steg kliver han med sannolikheten 1/2 till nästa pinne eller hoppar med sannolikheten 1/2 över en pinne (utom då han befinner sig på pinne 4, då han givetvis kliver till pinne 5).

a) Bestäm sannolikhetsfördelningen för antalet kliv. Vad blir förväntade antalet kliv?

b) Antag att sannolikheterna i stället är 1/3 för att gå till nästa pinne, 1/3 för att hoppa över en pinne och 1/3 för att halka ner på marken och tvingas börja om på nytt. Vad blir nu förväntade antalet kliv (från pinne 4 kliver han till pinne 5 med sannolikheten 2/3 och börjar om med sannolikheten 1/3; från marken kliver han som i a))?

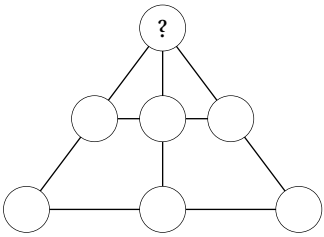
c) Besvara frågorna i a) för en godtycklig stege med m pinnar.

3839. Ett pärlhalsband består av 30 pärlor, 15 vita och 15 röda, godtyckligt blandade. Visa att det någonstans på halsbandet finns 10 pärlor i följd så att 5 pärlor är vita och 5 är röda.

Tredje häftet

3840. Ett visst år var det fyra måndagar i augusti och fem söndagar i oktober. På vilken veckodag inföll 1 september detta år? Hur många gånger under 1900-talet inträffar detta?

3841. I nedanstående sju ringar ska talen 1, 2, . . . , 7 placeras in på sådant sätt att de fem markerade raderna alla har samma summa. Visa att en sådan utplacering är möjlig. Vilken siffra måste stå i ringen högst upp?



3842. Leonardo skriver ner alla fyrsiffriga tal med olika siffror som kan bildas av talen 0, 1, 2, 3, 4 och 5. Han summerar sedan talen. Vad blir resultatet om han räknat rätt?

3843. Punkterna A, B, C, D och E utgör successiva hörn i en regelbunden tiohörning med sidan s. Vi bildar en regelbunden femhörning $BCFOG$ med samma sida som tiohörningen. Triangeln DOP bildas genom att vi drar sträckan DO och förlänger sträckorna DE och AO förbi E resp O till skärningspunkten P.

Ange ett exakt värde på förhållandet mellan femhörningens area och triangeln DPO:s area.

3844. Visa att för varje $n = 1, 2, \ldots$ att

a) $n^3 + 2n$ är delbart med 3 och

b) $n^5 + 4n$ är delbart med 5.

c) Generalisera dessa resultat.

3845. Låt x och y vara reella positiva tal. Vilket förhållande ska råda mellan x och y för att nedanstående uttryck ska bli så små som möjligt. Vad blir minimivärdet?

a) $(x+y)^5/(x^2y^3)$;

b) $(x+y)^7/(x^2y^5)$;

c) $(x+y)^7/(x^3y^4)$.

3846. I en roman av den finske författaren Arto Paasilinna (*Livet är kort, Rytkönen är lång*) hittar vi följande rader: ”Rytkönen ställde upp formeln för triangelmätning, vilken i all enkelhet såg ut på följande vis:

$$\Delta x_{13} = (\Delta y_{12} - \Delta x_{12} \tan t_{23})/(\tan t_{13} - \tan t_{23})$$
$$\Delta y_{13} = \Delta x_{13} \tan t_{13}.\text{”}$$

Vad i all sin da’r är detta? På något vis ska man tydligen ta reda på avståndet mellan två punkter med hjälp av en tredje punkt och vissa tangenter. Förklara formeln.

3847. I en 3-nationers friidrottslandskamp tävlade Sverige, Norge och Finland med en deltagare i varje gren, och vinnaren fick mest poäng, därefter 2:an och sedan 3:an. Inga diskvalifikationer eller delade placeringar förekom och samtliga deltagare fullföljde i sina grenar. Totalt vann Finland med 26 poäng, medan Sverige och Norge delade andraplatsen med vardera 15 poäng. Reidar Larsen från Norge vann diskustävlingen och Aron Lundblad blev tvåa i stavhopp. Från vilket land kom Aron? Alla poäng i grenarna var heltal ≥ 1. Kan du ge poängfördelningen?

3848. De positiva talen a, b, c uppfyller sambandet

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Visa olikheten $(a-b)(c-a) \geq 0$.

3849. I en skola placerar läraren sina 25 elever i en kvadratisk formation om 5×5 elever. Visa att det alltid går att hitta en delrektangel, vars sidor är parallella med 5×5-kvadraten, med enbart fyra pojkar eller enbart fyra flickor i hörnen.

Fjärde häftet

3850. Samtliga rutor i vidstående schema om 4×4 rutor ska fyllas med siffror. Följande ledtrådar ges:

Vågrätt	*Lodrätt*
1.a^2	1.e
5.b^3	2.f^2
6.c^4	3.g
7.d^4	4.h^4

1	2	3	4
5			
6			
7			

Bokstäverna $a, b, \ldots, h$ motsvarar heltal sådana att $a^2, b^3, \ldots, h^4$ blir fyrsiffriga tal (får alltså inte börja med 0). Bestäm $e+g$.

3851. Vilka primtal kan skrivas på formen $n^{n-1}+1$ om vi förutsätter att n är ett positivt heltal.

3852. Vid tingsrätten i Ockhult använder man sig av lögndetektor vid bevisföringen. Detektorn har testats vid universitetet i Humburg och man har där funnit att utslaget är korrekt i 95% av fallen. Detta resultat påstås gälla bland såväl kriminella som icke-kriminella personer.

För att nedbringa den ekonomiska brottsligheten i Ockhult kallas då och då en slumpvis vald invånare till ekoroteln. Denne får svara på frågan: ”Har du någon gång under det senaste året begått något ekonomiskt brott?”

Låt oss anta att 10% av invånarna faktiskt är skyldiga.

Den 1 november kallas invånare K till förhör. Detektorn utpekar honom som skyldig. Beräkna sannolikheten att K i själva verket är oskyldig.

3853. Är det möjligt att konstruera en triangel så att höjderna mot de tre sidorna är resp 1/4, 1/2 och 1?

3854. Gymnasieeleven Per Blom tycker om att ställa till problem. Nedanstående uppgift presenterar han för tre av sina lärare: Erika Alberg som är algebraiker, Annike Holst som har studerat en och annan sannolikhet i sina da'r och Kersti Tegmo som gärna tillämpar ett geometriskt synsätt vid problemlösning. Hur kan de tre tänkas visa följande olikhet?

Låt x, y och z vara tal mellan 0 och 1.

Visa att $xy(1-z)+xz(1-y)+yz(1-x) \leq 1$.

3855. En hushållsrulle består av papper upplindat på en papprulle. Hushållsrullens diameter är 10 cm medan papprullens diameter är 4 cm. Hur stor del av papperet har förbrukats när antalet upplindade varv har minskats till hälften?

3856. Vid det senaste träningspasset i Målgårda damlag infann sig bara fyra spelare. Tränaren kom då på idén att genomföra följande test: Hon delade ut fyra matchtröjor, alla med ett nummer på ryggen; talen var skilda positiva heltal. Ingen av spelarna fick se det egna numret, däremot kunde var och en se de tre övriga numren. Tränaren berättade att summan av tre av talen är lika med det fjärde talet. "Kan någon av er ange numret på den egna tröjan?" Efter en stunds funderande skakade flickorna på huvudet. En liten stund senare utbrast Kicki: "Men i så fall måste jag ha tröja nr 9 och jag har det högsta numret." Vad hade de övriga spelarna för nummer och hur kom Kicki fram till sin slusats?

3857. Tegn en mest mulig uregelmessig firkant. S betegner summen av kvadratene på sidene. G betegner summen av kvadratene på diagonalene. Konstruer fra et hjørne i firkanten et linjestykke, hvis kvadrat er differensen $S-G$.

Finn også resultatet dersom firkanten er speciell som et trapes, eller et parallellogram.

3858. Theon från Smyrna, som levde på 200-talet f Kr. hade en metod (se ex 3007 på sid 183 i Elementa nr 3 1975) för att beräkna kvadratroten ur 2. Den innebar att man startar med $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Med hjälp av rekursionsformlerna $x_{n+1} = x_n + y_n$ och $y_{n+1} = x_{n+1} + x_n$ räknar man sedan fram en tabell som börjar så här:

n	x_n	y_n
0	1	1
1	2	3
2	5	7
3	12	17

Då n växer kommer kvoten y_n/x_n att närma sig kvadratroten ur 2.

a) Visa detta resultat.
b) Visa att $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ och rekursionsformlerna $x_{n+1} = x_n + y_n$ och $y_{n+1} = x_{n+1} + (c-1)x_n$ leder till att kvoten y_n/x_n går mot $\sqrt{c}$ då n växer obegränsat.

3859. Placera ut talen 1, 2, 3, 4, 5 i rad i någon ordning, t.ex. 3, 5, 1, 2, 4. Bilda en ny rad genom att addera talen två och två, första talet med andra, andra med tredje osv. I exemplet får vi $3+5$, $5+1$, ..., $4+3$ eller 8, 6, 3, 6, 7 (när vi nått radens slut börjar vi från början igen). Vi bildar en ny rad genom att addera tre tal i taget i föregående rad; i exemplet $8+6+3$, $6+3+6$, ..., $7+8+6$ eller 17, 15, 16, 21, 21.

Proceduren avslutas genom att addera fyra tal i taget. Med givna värden får vi $17+15+16+21$, ..., $21+17+15+16$ eller 69, 73, 75, 74, 69.

Den fjärde raden inleds alltså i detta fall med 69. Vilket är det största möjliga talet i denna position? Vilka startsviter leder till dessa extremvärden?

Utför motsvarande uppgifter för talen 1, 2, ..., 7 med sex additionssteg.