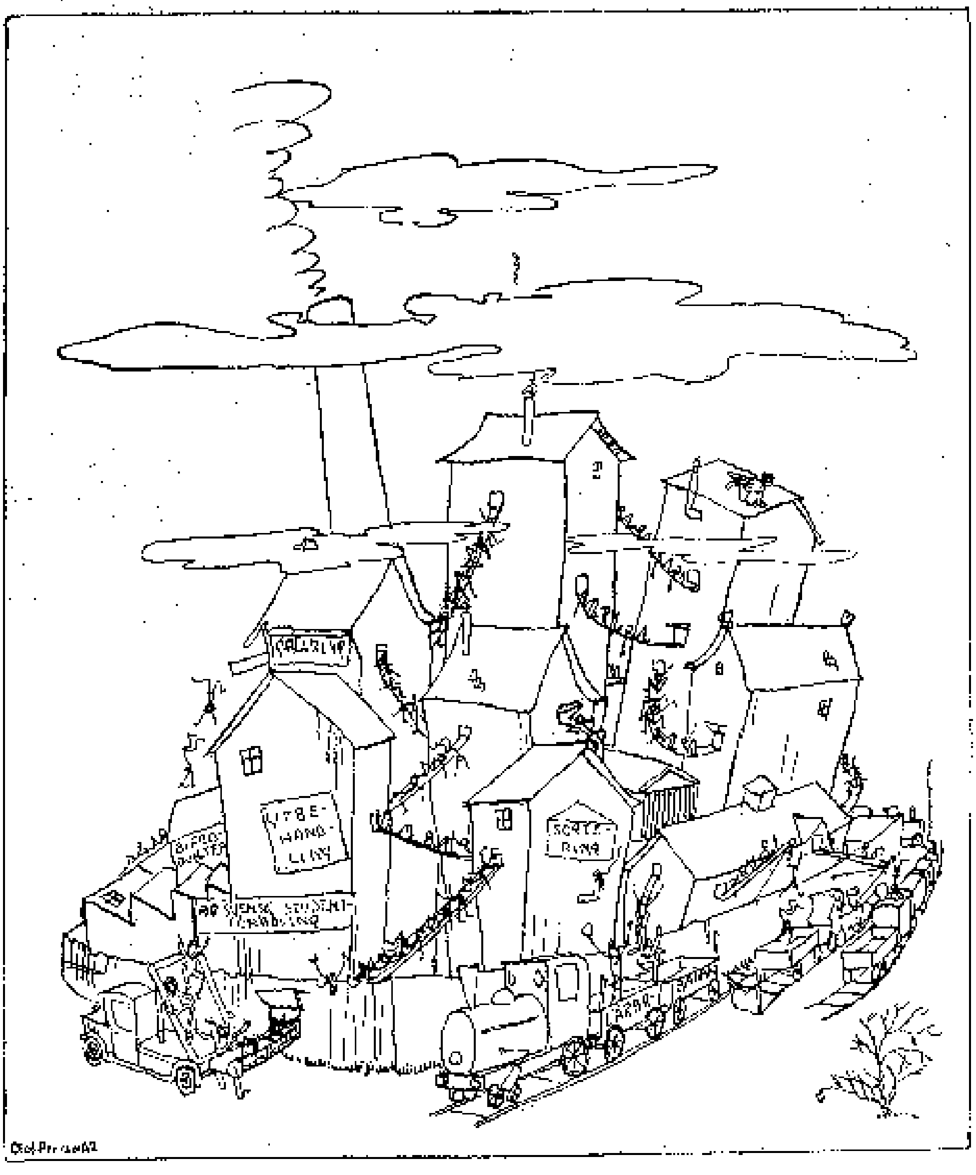
Bulletinen

15 oktober 2017 *Svenska Matematikersamfundets Bulletin* *Redaktör:* Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Klas Markström



Det myckna talet om studiernas rationalisering har framkallat ovanstående skräckvision hos vår tecknare. Den enda ljuspunkten är att det trots allt även blir biprodukter (statsministrar o. dyl.).

Individuella Lönesättningar: *Arne Söderqvist*
Solförmörkelser: *Persson, Kiselman*
Henrik Eriksson avliden: *Almkvist* **ISAAC:** *Joachim Toft*
Kategoriteori för grundskolan?: *Önneflod*
Ett Nytt År (för): *Markström*

Bulletinen

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare: *Klas Markström*
Redaktör: *Ulf Persson*
Adress: *Medlemsutskicket c/o Ulf Persson*
Matematiska institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `latex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap, *200 kr*
Reciprocitetsmedlem *100 kr.*
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år
Gymnasieskolor: *300 kr.*
Matematiska institutioner: *Större 5 000 kr, mindre 2 500 kr*
(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).
Ständigt medlemsskap: *2 500 kr (engångsinbetalning)*

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 220 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.swe-math-soc.se`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ANNONSER

(Dessa publiceras inom en ram som denna)

helsida 3000 kr
halvsida 1500 kr
mindre 750 kr

Annonser i tre konsekutiva nummer ger endast dubbla priser d.v.s. 1/3 rabatt

Annonser inlämans som förlaga
samt i förekomamnde fall som text-fil, Dessa formateras om i PostScript

Detta Nummer

Detta nummer kommer att vara något kortare än sedvanligt, beroende på att ingen av mina otaliga intervjuer har beretts plats denna gång. En del kan dock numret bjudas på.

Klas Markström från Umeå har tillträtt som den nye ordföranden för Samfundet och inkommer som kutym är med en krönika. Växjö har i sommar varit värd för den så kallade ISAAC kongressen. Jag misstänker att de flesta läsare inte känner till vad ISAAC står för (det gjorde inte jag heller). Om man googlar akronymet (som vi alla uppmanas göra nuförtiden) dyker *The International Society for Augmentative and Alternative Communication* upp, vilket stöder barn och vuxna med komplexa kommunikationsproblem. Visserligen kan man hävda att detta nog har sin tillämpning på matematiker, men trots detta är det inte denna organisation som avses. Joachim Toft ansvarig för kongressen och tillika dess vicepresident, inkommer med en kort notis.

Henrik Eriksson avled i somras. Kanske inte alla känner till honom i den svenska matematikervärlden, men på KTH var han något av en institution sedan 60-talet. Han var inte vad vi kallar en forskningsmatematiker, därtill var hans intressen för vida, (visserligen skrev han så småningom en doktorsavhandling men det var inte hans prioritet i livet), men ändå lämnade hans gärning nog större avtryck än den gängse matematikerns i synnerhet om man går utanför dennes akademiska värld.

Nåja, vad annat? Vår redaktör Arne Söderqvist har i en serie artiklar belyst missförhållanden inom svenska myndigheter som framförallt uppkommer genom ett blint kopierande av näringslivet. I näringslivet finns vissa automatiska kontrollmekanismer, misskötta företag går förr eller senare omkull om de överlämnas helt åt sig själva, detta gäller inte för myndigheter. I detta nummer presentar han några avslutande kommentarer. Detta nummers längsta artikel står Leif Önneflod för. Det är menat som ett debattinlägg.

Jag har sedan barndomen varit fascinerad av astronomi, något som jag misstänker att jag delar med många matematiker. För det barn som älskar tal erbjuder astronomin på en uppsjö på sådana och dessutom ofta mycket stora, så kallade astronomiska. Det förbluffande är att man kan med mycket enkel matematik beskriva ganska komplicerade astronomiska fenomen. I detta nummer koncentrerar jag mig på solförmörkelser, inspirerad av en räcka rapporter om totala solförmörkelser som Christer Kiselman har varit med om under sitt liv och dessutom skrivit ner. Själv har jag aldrig upplevt en total solförmörkelse, den senaste totala i Sverige inträffade som bekant sommaren 1954 (vi kommer att få vänta mycket länge på en repris). Jag besåg den genom av min pappa sotade glas uppe i Nordmalingstrakten, där den endast var partiell. Men trots detta utgör det ett av mina tidigaste bevarade barndomsminnen. I ett kommande nummer planerar jag att skriva en artikel tillsammans med astronomen Maria Sundin vid Chalmers om exoplaneter och hur man på senare tid har lyckats påvisa deras existens.

Ett nytt år börjar

Klas Markström, Umeå Universitet

Ett nytt akademiskt år har börjat med dess vanliga blandning av det som å ena sidan är helt nytt för vissa, alla våra nya studenter, och det som är rutin för andra, vi som undervisar och forskar på de olika lärosätena runt om i landet. Den här blandningen av det som å ena sidan är något nytt och å andra sidan är rutin är något som följer oss i universitetsvärlden genom disputationer och och andra uppdrag. Ännu en sådan återkommande förändring är det nu dags för inom samfundet, som på udda år får nya ordförande, och bitvis ny styrelse. Vid årsmötet i Umeå i juni så valdes jag själv till ordförande och Tomas Persson till vår nye vice ordförande. I styrelsen fortsätter Olof Svensson som sekreterare, Frank Wikström som skattmästare och Jana Madjarova som femte ledamot.

Jag vill här passa på att tacka vår avgångna ordförande Milagros Izquierdo för hennes arbetsinsatser under de år som hon varit med i styrelsen, som både ledamot och ordförande. I juni höll samfundet tillsammans med de Spanska och Katalanska matematikersamfunden en gemensam konferens i Umeå och Milagros har till stor del varit den drivande bakom det här lyckade arrangemanget. Med tanke på den spända politiska situation som idag finns i Spanien så känns det bra att ha haft en konferens där vi på ett konstruktivt sätt samlades kring den matematiska forskningen, helt oavsett politiska och nationella bakgrunder.

Ser vi framåt så har samfundet under det kommande året i vanlig ordning två medlemsmöten. De första av dessa är höstmötet den 17e November som hålls i Umeå i anslutning med finalen för Skolornas Matematiktävling. I motsats till det gångna året så har samfundet inga konferenser eller liknande arrangemang inplanerade för det här året utan fokus ligger nu på våra återkommande verksamheter och de förslag på nya aktiviteter som kan komma från både medlemmar och styrelse. Vi närmar oss ett valår och vi kommer säkert att få anledning att tillsammans med Nationalkommittén för matematik göra matematiken synlig i de forskningspolitiska diskussionerna. Här anser jag själv att populärvetenskapliga insatser också är viktiga då vi vill förmedla, inte bara matematikens praktiska betydelse, utan även vår egen fascination för ämnet till både beslutsfattare och den breda allmänheten.

◇ ◇ ◇ ◇

Resestipendier

SVeFUM – Stiftelsen för Vetenskaplig Forskning och Utbildning i Matematik - ledigförklarar härmed resestipendier för i Sverige bosatta matematiker av alla kategorier, dock lägst på doktorandnivå. Stipendier kan sökas för konferenser och andra resor med vetenskapligt syfte, ävensom för längre postdoc-vistelser i utlandet. Utdelade stipendier är personliga och utbe- talas till stipendiatens privata konto. Ansökningar, ställda till SVeFUM, c/o Prof. Kjell-Ove Widman, sänds per e-post till `svefum@widman.ch` och bör innehållande en kort redogörelse för ändamålet med resan, budget, CV i kortform samt svenskt personnummer och kontonummer för utbetalning. Svenska examens- och anställningstitlar används i förekommande fall. För doktorander fordras rekommendationsbrev från handledare, skickat direkt till SVeFUM, liksom en lista över genomgångna kurser och ev. publikationer eller preprints.

Sista ansökningsdag är **2018-02-28**. Ev. frågor riktas till `svefum@widman.ch`

Pedagogen Henrik Eriksson

Ulf Persson

Jag hörde talas om honom för första gången 1968 i samband med att min gamle vän Andreas Wannebo hade börjat på Teknis och beskrev honom i glödande ordalag. Han var vad man skulle kunna kalla den evige assistenten. För femtio år sedan stod inte professorerna för den elementära undervisningen[1] utan istället stod en stab av amanuenser och assistenter, unga matematiker som hade visat framfötterna i de inledande studierna eller hade börjat lissa, för denna nödvändiga aspekt av verksamheten. Speciellt i slutet av 60-talet i och med studentexplosionen svällde denna stab i omfång. Jag minns att när jag började på SU 1969 fanns det sex olika grader, man kunde vara antingen assistent eller amanuens, och i så fall första, andra eller tredje. Vari skillnaderna egentligen bestod lyckades jag aldrig helt lista ut, men tredje versionen innebar bara en bråkdel av undervisningsplikten jämfört med förste versionen, men den exakta rangordningen mellan en förste amanuens och en tredje assistent blev det aldrig aktuellt för mig att erfara. Henrik Eriksson var den lysande assistenten, den som alla matematikstudenter på KTH kom i kontakt med. Man skall komma ihåg att för femtio år sedan intogs bara en handfull studenter på teknisk fysik inom en teknisk högskola av vilka det endast fanns två, och det var således förenat med mycket hög prestige. De studenter som då samlades hade varit överlägset bäst i sina klasser i gymnasiet, som i sin tur var ganska exklusiva på denna tid, och fick då för första gången tllfälle att träffa likasinnade och på allvar mäta sina krafter med dessa. Det var klart att de då, kanske lite vilsna och smått överväldigade, kände ett behov av vad vi nu kallar en mentor, d.v.s. någon matematiker som var lite äldre och erfarnare, men ändå ung, och med vilken de kunde relatera på ett helt annat sätt än med äldre professorer. Eriksson fick rykte om sig att vara en enastående pedagog. Den några år yngre Stefan Arnborg minns.

> *Jag gick bara på några få av hans övningar eftersom jag dumt nog mest skolkade - på den tiden fanns ju bra läroböcker. Men mina studiekamrater insisterade på att Henriks övningar var värda besök. Jag minns hans glada uppsyn och kluriga kommentarer - han kunde faktiskt komma av sig också, men utan att det blev pinsamt. Mina studiekamrater var helt överens om att han var bästa läraren på F. ... Under trettio år hade jag mycket med Henrik att göra. Han kunde diskutera alla forskningsproblem utan att skämmas för att han inte specialiserat sig på djupet. Men han var också benhård i sin övertygelse att KTH är till för studenterna och han var alltid beredd att kritisera eller kringgå mindre lyckade innovationer i regleringen av undervisningen. Det är ett otacksamt arbete, men det måste göras. När jag ansvarade för några utbildningsprogram märkte jag att det finns många bra lärare på KTH, men Henrik var unik genom att alltid vara på topp. ... på 90-talet var jag djupt oroad av konstiga förändringar som genomdrevs på KTH. Det blev mycket lättare för mig att hantera det efter att Henrik övertygat mig om att förändringarna styrdes av oförnuft snarare än elakhet.*

[1] Jag minns hur förvånad jag blev när jag kom till Harvard och professorerna var även involverade i nybörjarutbildningen.

Dessa funderingar kan sammanfattas, så låt mig bara citera från en nyligen publicerad DN-runa författad av samme Stefan Arnborg samt Johan Karlander även den senare samtida med honom på KTH.

> *Bland studenterna på KTH har Henrik varit en legendarisk person. Han var för dem en närmast mytisk gestalt som var bättre lärare än alla andra, som alltid var där för kontakt och som alltid upplevdes som deras sanne vän. Henrik undervisade i en sokratisk anda men hans framgång som lärare verkar inte ha berott så mycket på pedagogiska principer som på något mycket mer grundläggande. Det var hans unika personlighet som rymde en speciell blandning av vetande, kreativitet och esprit. Studenterna älskade Henriks humor som var rik, fantasifull och som var - vi måste använda ordet med samma självmedvetna stolthet som studenterna gör det - passande nördig.*

Eriksson var helt enkelt en institution, och som sådan personifierade han den anda som utmärker en solid och hälsosam teknisk högskola. Men vad som är anmärkingsvärt är att denna auro försvann inte när han själv blev en gammal stöt och studenterna inte längre togs bara från gräddan av svenska gymnasister. Vad var hemligheten med denna pedagogiska framgång? En sak är säker det rörde sig inte om någon formell pedagogisk utbildning, vad hade han att lära av didaktikerna? Först och främst, som det kommer att framgå av Gert Almkvists betraktelse, var Eriksson en stjärnstudent i matematik och hade därmed ett levande intresse för, liksom sitt eget perspektiv på matematiken, utan denna grund föreligger inte fenomenet pedagogisk förmåga som inte kan existera i ett vakuum (man kan inte ha den abstrakta förmågan att "lära ut" om man inte har något att förmedla, ty detta kommer först, pedagogiken kommer senare som ett kommunikationsbehov). Men alla framstående matematiker är inte lysande pedagoger, snarare tvärtom, även om undantagen kanske är vanligare bland dessa än bland de mindre framstående. En stor del av hemligheten formuleras av våra författare till nekrologen, om än kanske i lite väl försiktiga ordalag i slutklämmen.

> *Henrik var gränslöst generös. Han hade en ovanlig förmåga att kunna ge. Han hjälpte studenter, kollegor och vänner. Henrik åtog sig aldrig några administrativa uppdrag men han utvecklade undervisningen på många sätt, inte sällan mot olika ledningars råd. Han gjorde det inte för att vara rebellisk utan för att han hade en egen vision om hur undervisning borde vara. Henriks pedagogiska idé var kanske att han tyckte så mycket om sina studenter att han utav kärlek till dem inte kunde göra annat än att se till att mötet med dem blev så rikt, intressant och minnesvärt som det bara var möjligt.*

Det är det personliga engagemanget som gör det möjligt, och detta kan man inte läsa sig till i någon bok. Jag har förgäves försökt få fram konkreta exempel på hans pedagogiska förmåga, vissa av mina vänner har faktiskt erkänt att de anammat många av hans pedagogiska tricks i sin egen undervisning, men är av någon anledning oförmögna att formulera dessa. Kanske lika bra det. Man kan inte läsa sig till det. Att undervisa är en konst och inte en vetenskap trots alla mer eller mindre hedervärda ambitioner att ställa detta på huvudet[2]. Dock kan jag citera nationalekonomen och spelteoretikern Jörgen Weibull som började på 'Teknis' 1967.

> *Ett starkt minne av Henriks pedagogik, som sedan inspirerat mig i min undervisning, var hans förmåga att dramatisera för att levandegöra definitioner och logiska kvantifikatorer. När han tex definierade en funktions kontinuitet i en punkt så tänkte han sig en "elak" person som valde ett mycket litet epsilon, och en "god" person som kunde "försvara" funktionen genom att välja ett tillräckligt litet delta. Det var litet som i en rättegång där funktionen anklagades för diskontinuitet i punkten. Den som valde epsilon var åklagare och den som svarade med ett delta försvarsadvokaten. När jag för doktorander i nationalekonomi undervisar om abstrakta matematiska egenskaper (som tex uppåt hemi-kontinuitet hos korrespondenser) eller satser (tex Kakutanis fixpunktsats) gör jag ofta dramatiseringar inspirerade av Henriks fantastiska pedagogik. Och deltagarna verkar ofta komma ihåg dessa dramatiseringar och metaforer, och det tycks hjälpa dem att förstå materialet. Det hela blir spännande och roligt. I sin undervisning visade Henrik humor och värme och vi kände att han tyckte om oss, brydde sig om oss, och att han hade roligt med oss. Matematik blev lustfyllt.*

Man kanske skall påpeka att det uppenbarligen inte räcker med att slaviskt följa hans egna exempel utan de skall endast tjäna som inspirationer till föreläsarens personliga försök. Den genuint rolige är aldrig den som berättar så kallade 'roliga' historier (vad kan inte sällan vara pinsammare?) utan den som följer sin ingivelse i en plötsligt uppkommen situation[3]. Men ingivelser förutsätter en given grund.

I detta sammanhang kan jag kanske inflika en kritisk kommentar. Om nu någon är så fantastisk vid katedern, (så även om ingen fysisk kateder är närvarande rör det sig om katederundervisning och den därtill hörande scenkonsten), skulle man inte kunna överföra denna magi till en mycket större publik helt enkelt genom att (video)filma spektaklen? Detta gjordes mycket riktigt dock främst inte på KTH, även om vissa valhänta försök lär ha gjorts även där, men framför allt för Linköpings tekniska högskola, som Almkvist kommer att

[2] Man kan hänvisa till amerikanen John Dewey (1859-1952), en elev till den legendariske psykologen William James för övrigt, som vädjade för att undervisningen inte skulle förbliva en konst utan utvecklas till en vetenskap så att utövarnas gärningar inte skulle gå i graven med dem.

[3] Givet en totalt ordnad uppräknelig mängd, kan den ses som en delmängd av de reella talen med bibehållen ordningsrelation? $\mathbf{R^2}$ med lexiografisk ordning visar att uppräkneligheten är väsentlig? Men även dessa mängder kan vara ganska komplicerade, tänk bara på alla upptänkliga uppräkneliga ordinaltal

$$\omega, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} (\omega(\text{times})) = \Omega[1], \ldots, \Omega[1]^{\Omega[1]^{\Omega[1]^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} (\Omega[1](\text{times})) = \Omega[2], \ldots$$
$$\ldots, \Omega[\omega], \ldots \Omega[\Omega[\Omega[\Omega \ldots]]](\omega(\text{times})) \ldots !$$

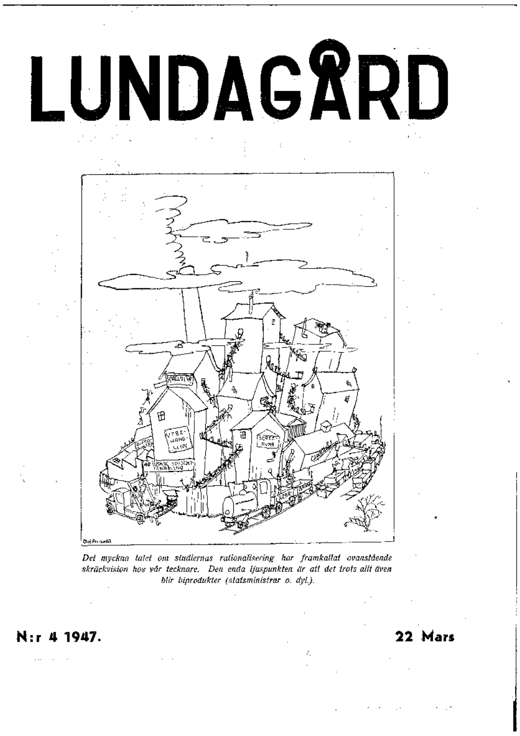
Beviset för detta är mer eller mindre trivialt. Betrakta en uppräkning (lättare sagt än gjort i praktiken) x_n. Definera sedan för varje x i mängden $\phi(x) = \sum_{n:x_n<x} 2^{-n}$. Situationen uppkommer i nationalekonomin när man vill tilldela kommoditeter med givna preferensvillkor numeriska värden. För den gängse studenten i ekonomi kan detta synas mycket torrt och esoteriskt. Weibull har berättat att han leder dem på traven genom att låta dem föreställa sig en chokladkaka som han delar på hälften behåller en, och därefter delar resten i två halvor och behåller en och så vidare.

berätta närmare om, och Eriksson var knappast förvånande engagerad, men av vad jag förstår fungerar inte detta. Magin överlevde inte, det är en helt annan sak att uppleva något i verkligheten än att se det på bild. En njutbar film bygger på professionalism, d.v.s. regi, det är inte bara att sätta en kamera i ett hörn, och tro att allt kommer att fungera. En skickligt presenterad Henrik Eriksson på duken eller numera på skärmen är inte Henrik Eriksson, utan någon som spelar honom, även om skådespelaren händelsevis är Eriksson själv.

◇ ◇ ◇ ◇

Titelsidans Illustration

Ulf Persson



Vad är ett universitet? En korvstoppningsfabrik som producerar på löpande band kuggar i samhällslivet? Detta är väl vad politikerna eftersträvar med den heliga tillväxten i blicken? Frågeställningen är gammal och kan givetvis spåras långt bak i tiden. Jag har dock inte gått så värst långt bak i tiden, utan under min röjning inför en förestående flytt dök ett gammalt nummer av Lundagård upp, nämligen nummer 4 från 1947. För den oinvigde bör kanske påpekas att Lundagård är den klassiska studenttidningen med nästan sekelgamla anor, ty den började ges ut 1920 och är fortfarande 'still going strong' men en upplaga på drygt 40 000 och ges ut till alla studenter i Lund (captive audience). Bland forna redaktörer återfinns namn som Gunnar Aspelin, Ivar Harrie, Hjalmar Gullberg, Per Nyström, Torgny Segerstedt, Lasse Holmqvist, Hasse Alfredsson, Gunnar Fredriksson, Bengt Göransson, Per Gahrton. Men varför hittar jag just detta nummer i flyttbråten? Jag har mig veterligen aldrig varit student i Lund, men däremot min far – Olof Persson (1921-78) – som i sin ungdom var en ivrig tecknare, och bidrog denna gång med titelsidans illustration. Så denna gång är titelsidan en titelsida.

Henrik Eriksson 1942-2017

Gert Almkvist

Henrik Eriksson har avlidit efter en kort tids sjukdom. Från 1959 var han min elev i matematik på KTH. Han gick på Teknisk Fysik, där endast 30 i hela Sverige togs in årligen. I klassen fanns en flicka, Gerd Sjöstrand, som sedan skulle bli Henriks fru. Båda hade alla rätt på tentorna, men Henrik lyckades få plats med alla lösningar på ett ark.

Det dröjde inte länge förrän Henrik övertog undervisningen av Teknisk Fysik. Inspirerade av Jan-Erik Roos i Lund bildade vi med Bo Stenström en grupp som studerade Homologisk Algebra. Vår chef Göran Borg kallade oss för den "topologiska gruppen" (pun not intended?). 1967 blev Henrik licentiat under min handledning. Jag flyttade till Lund 1967, men vi lovade varandra att någon gång i framtiden skriva en bok om roliga matematiska problem. Detta blev nu aldrig av, men jag har en stor samling problem, som Henrik har skickat.

Ett problem, som gick i andra riktningen, var den s.k. "Bulgariska patiensen", som kom från Ryssland via Bulgarien. Henrik fann en elegant lösning och hittade på namnet.

1967 byggdes också Tekniska Högskolan i Linköping. För att spara in lärarna bildades TRU (Television och Radio i Utbildningen) med chefen Lars Ag. Henrik blev engagerad och gjorde under tio år otaliga program. Sedan arbetade han på QZ (Stockholms Datacentral) i sex år. 1982 var Henrik tillbaka på KTH och från 1984 universitetslektor på NADA (Numerisk Analys och Databehandling). Vid 54 års ålder disputerade Henrik (handledare Anders Björner) på en avhandling om Coxetergrupper.

Henrik skrev ett tjugotal läroböcker i matematik och datavetenskap. Han publicerade vid sen ålder lika många vetenskapliga artiklar, huvudsakligen inom kombinatorik. Flera arbeten skrevs med sonen Kimmo och Kimmos kusin Jonas Sjöstrand. Henrik hade som vänner flera av världens ledande kombinatoriker, som George Andrews, Richard Stanley och Christian Krattenthaler.

I Lund har vi ett Matematiskt Sällskap (grundat av Tage Erlander), som ger populära föreläsningar i matematik. Henrik har varit anlitad ett flertal gånger. Bl. a. berättade han om sina kontroverser med spelföretaget Alga. I ett av deras spel förekom bevisligen omöjliga ställningar. Alga menade att om man bara försökte tillräckligt länge, skulle det nog gå. Vid ett av sina besök i Lund träffade Henrik den nästan 90-årige Folke Lannér och diskuterade genteknik med honom. Henrik hade humor, vilket följande föredragstitlar avslöjar: "Of mice and men", "Darwin som bridgespelare", "Sannolikt, sannolikt säger jag eder ...". Till och med hans tentor innehöll kvickheter. Då de delades ut kunde man höra fniss från eleverna.

Följande historia berättade Henrik för några år sedan: Han var medlem i Ingmar Hedenius Humanetiska Förbund, men hade inte varit aktiv på länge. Han mötte en vän, som var mer aktiv. Denne sade att vi har ett möte om en månad, där vi skall diskutera realismen, kan du inte komma?. Henrik lovade att komma. Då Henrik kom blev han nertryckt på en stol vänd mot auditoriet. Hans vän sade; Vi har glädjen att ha Henrik Eriksson här och jag överlämnar ordet till honom. Henrik säger: Vi skall diskutera realismen. Hans vän avbryter honom: Du har visst inte läst tidningen idag. Ämnet är: Gud och den moderna fysiken. Varpå Henrik håller en timmes föredrag om detta ämne.

Henrik var en fantastisk lärare. Han fick flera gånger priset som bäste lärare på KTH. Han fick Ångpanneföreningens pris på 100 000 kronor, inte dåligt för en matematiker! Han handledde hundratals examensarbeten på NADA. Han lyckades införa en kurs i Allmänbildning, där han själv undervisade. Då han fyllde 67, förbjöd rektorn på KTH honom att undervisa vidare. Då demonstrerade 2000 teknologer för att Henrik skulle få vara kvar.

Hela familjen var mycket aktiva i musiken och Henrik översatte till och med Gilbert & Sullivan-operor. Hela svenska folket fick en glimt av detta under Lasse Holmqvists "Här är ditt liv"-program om Nancy Eriksson. [1] Henrik och systern Helen framförde en kuplett på ren stockholmska hyllande den skånska modern Nancy.

Henrik läste japanska och råkade av misstag få två betyg i stället för ett. Han sökte och fick tjänsten som teknisk attaché i Tokio, men tillträde aldrig Gerd sade stopp.

Jag har en liten bok med konstiga schackproblem, som Henrik har hittat på. En annan bok jag fått är "Samlade cykeldikter 1993-2003", varur jag avslutar med ett exempel från 1993.

Bilköer, bilköer utan ände,
motorer som kokar, parkeringselände.
Inget att reta sig på, tyckte vi
helt filosofiskt och cykla’ förbi.

CV-Data
f. 19/1 1942 d. 27/7 2017
`Examina vid KTH`
Civ.Ing. 1963, Tekn.lic. 1967, Ph.D. 1994
Verkade vid KTH 1960-2009
(Vid TRU, UR, QZ 1968-84)
`Handledning`
Doktorander 2, Masterstudenter 240 [sic]
`Pedagogiska Utmärkelser`
Otaliga

[1] Namnet må inte säga yngre läsare mycket, men på sin tid var hon en framstående socialdemokratisk riksdagskvinna, och för att vara lite elak bidrog även detta till sonens mytiska status. [red.anm.]

Individuell Lönesättning

Arne Söderqvist

I de två senaste numren av Bulletinen har jag kritiserat företeelser som tjänstetillsättningar utan utlysningsförfarande, individuell lönesättning, systemet med "HÅS" och "HÅP", didaktik och NPM. I denna avslutande artikel tar jag upp ytterligare några synpunkter.

Det kan tyckas vara förnuftigt att "duktiga lärare" ska belönas med ett högt individuellt lönepåslag. Om det hade varit enkelt att identifiera "de duktiga", så vore saken klar. I själva verket brukar det bli fråga om dem som har samma synsätt som cheferna eller som är deras personliga vänner. Detta leder till en olycklig likriktning. Alla "original" ska ställa in sig i ledet. Under min tid vid KTH i Södertälje och Haninge framhölls Henry Fords idé om utbytbara delar som ett rättesnöre. Studenterna skulle inte märka om de av misstag råkade gå till en annan lärares undervisning. Föreläsningar och seminarier skulle vara identiska för kolleger med gemensamma kurser. All egen professionalism skulle läggas åt sidan och påbjudna direktiv följas. Henrik Erikssons av teknologerna uppskattade lärargärning skulle föranlett kallelse till upptuktning. Därtill kan läggas att mina chefer hade mycket ytliga ämneskunskaper och därmed sköt alla ämnesaspekter åt sidan.

Antalet helårsstudenter, "HÅS", och antalet helårsprestationer, "HÅP", hade betydelse för hur högt anslag verksamheten skulle tilldelas av departementet. Sålunda ordnades varje augusti en "roadshow" med syftet att locka nya studenter till utbildningarna. Ofta hade höstterminen redan startat när man framförde budskapet "Än är det inte för sent att börja på KTH". Dessa sent värvade studenter kan knappast ha haft ett genuint intresse för studierna, då de ju inte själva kommit på tanken att ansöka. Dessutom fick de sämsta möjliga start då undervisningen redan pågått någon vecka när de började studera. Men det gällde alltså för lärarna att "producera" så många "HÅP-ar" som möjligt för att blidka departementet så att ytterligare medel tilldelades verksamheten. Det kunde gå till på olika sätt, som att erbjuda extra individuella tentamensskrivningar.

Lönerna ska förhandlas individuellt. Skulle en sådan förhandling gå till på ett vettigt sätt, så skulle cheferna få ägna väsentlig tid med att verkligen sätta sig in i hur de underlydande skött sina tjänster. Sådan tid anser de sig dock inte ha, utan sneglar istället på studenternas kursutvärderingar i samband med lönesamtalen. Kursutvärderingarna är emellertid uteslutande till som underlag för förbättringar av kursinnehållet. Rykten man "hört" spelar också stor roll. Men egentligen ska såväl chefer som underlydande förbereda sig väl inför de individuella förhandlingarna, om dessa ska vara meningsfulla. Frågan är om inte tiden i så fall kunde användas bättre, exempelvis till engagemang för tjänsteuppdragen. Men i sanningens namn är löneskillnaderna lärarkolleger emellan inte särskilt stora, åtminstone inte i jämförelse med sektorer utanför utbildningsväsendet. Men klart är att även mycket små skillnader de facto innebär en rangordning.

Under min tid vid KTH i Södertälje kom självaste dåvarande rektorn för KTH, Anders "Flodis" Flodström, dit för att personligen dela ut ett pris till "årets bäste lärare". Det hela var mycket högtidligt och ägde rum under pompa och ståt. I minglet efteråt passade jag på att fråga "Flodis" vad den belönade läraren haft för epokgörande idéer. Han svarade att han inte visste det. Jag frågade då några andra högt uppsatta personer inom organisationen, men ingen av dessa visste heller. Man kan då undra på vilket sätt den hedrade skulle utgöra förebild för oss andra. Jippot föreföll mig ganska meningslöst.

NPM, eller "New Public Management", som det tydligen heter på svenska, har blivit som en religion inom den offentliga sektorn. Tanken bakom är att privat företagsamhet anses bedrivas effektivare än offentlig verksamhet. I den mån man inte privatiserar ska man istället i så hög utsträckning som möjligt efterlikna den privata sektorn. Att detta lett till olika vansinnigheter och om man ens ser dem, så betraktar man dem möjligen som smärre skönhetsfläckar eller barnsjukdomar, som kommer att försvinna med tiden. Jag beskrev i min förra artikel hur det gått när KTH:s vaktmästeri i Södertälje privatiserats.

"Valfrihet" har blivit en ledstjärna. Skolelever ska få välja skola och inte bli tilldelade en plats i en skola som kommunala myndigheter bestämt. Men valfrihet innebär att det ska finnas olika alternativ att välja mellan. Detta innebär alltså en redundans av skolor, salar och lärare. Dessutom måste varje skola av självbevarelsedrift marknadsföra sig. Resurser går därmed åt till sådant som egentligen är helt onödigt istället för att komma god undervisning tillgodo.

◇ ◇ ◇ ◇

Prästen och Klockaren

Gert Almkvist

Prästen sade till klockaren. Idag var det förutom oss två bara tre personer i kyrkan. Produkten av deras åldrar var $xyz = 2450$ *och summan din dubbla ålder* $x + y + z = 2k$. *Hur gamla var de tre personerna? Klockaren som var väl bevandrad i aritmetikens fundamentalsats kunde inte lösa problemet. Prästen: Om jag säger att jag var äldst i kyrkan idag, kan du lösa problemet då? Det kunde klockaren meddetsamma. Hur gammal var prästen?*

Problemet ovan hade både jag och Henrik mycket roligt med. (Det blev Kaptenen och Båtsmannen i en bulgarisk tidskrift). Problemet hittade min mor i Nötknäpparen för snart sjuttio år sedan. Jag har även inkluderat det in min bok “Algebra” och av Hörmander betecknades det med 4 stjärnor, ty han tyckte att det var enormt svårt.

The Mathematics behind Solar Eclipses

Ulf Persson

Introduction

It is a remarkable fact that the apparent diameters of the Moon and the Sun are approximately the same. The Sun is about a hundred times bigger than the Earth which is in its turn about four times bigger than the Moon. However, the Sun is about four hundred times more distant than the Moon[1]. This is clearly an accident of time and place. The Moon is in fact slowly receding from the Earth and will in due time become an independent planet. In the past it was closer and then solar eclipses were not only more common, but the area of totality covered a larger percentage of the Earth's surface as well as lasting longer. In the future, solar eclipses will be of the past.

Internal View

The Moon makes an orbit around the Earth in 27.321661 days or (27 d 7 h 43 m 11.5 s)[2] this is not the period between say two new moons (called the synodic, while the former is called the sidereal), because in the interim the position of the Earth has shifted in its orbit. As both the Moon and the Earth rotate in the same sense. The Moon will have to move a little bit more, just as the rotational period of the Earth with regards to the stars is 23h 56m, while the period between two noons is 24 h (by definition). In 19 years the Moon has orbited the Earth very close to 254 times[3] but during that period it has only rotated 235 (=254-19) times around the sun. The synodic period is thus $\frac{254}{235}$ times that of the sidereal, which comes out to 29.531 days. Now the sky itself rotates from east to west, but if we fix it, the progress of the Sun and the Moon goes instead from west to east. The Sun makes the apparent rotation of $360°$ in 365.2425 days[4], this means roughly $1°$ per day, or more exactly $0.986°$ a day or $0.041''$/s. This varies over the year, but we will ignore this. That speed should be compared with the speed of $15''$/s at which the sky rotates. The speed of the Moon is significantly faster, at a synodic period of 27 odd days we similarly get roughly $13°$ a day, or $0.549''$/s. If we are interested in the movement of the Moon with respect to the Sun, we should take the difference (as both the Earth and the Moon rotate in the same sense), this will amount to roughly $12°$ a day or $0.508''$/s, which would be what we would we have found had we used the sidereal period of 29 odd days instead. However, the speed of the Moon varies so much that we will decide not to ignore it. The reason is that while the orbit of the Earth is nearly circular [5] while that of the Moon is much more elliptical. In fact the

[1] The actual value is 400.916 . . .

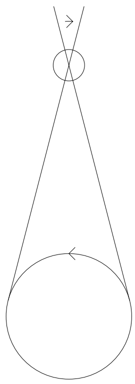
[2] This is of course an average, the actual orbital period varies due to the complexity of the three-body problem.

[3] in fact 0.003454 days short, which amounts to less than five minutes.

[4] 97 leap days in 400 years according to the Gregorian calendar. The astronomers ironically stick to the Julian

[5] cannot be distinguished from a circle by eye alone unless prompted by the placement of the Sun in one of the foci

the perigee (closest to the Earth) is 362,600 km and its furthest 405,400 km (apogee). The arithmetical mean (384,100 km) corresponds to the semi-major axis, usually denoted by a. However the arithmetical mean is not that relevant due to Kepler's second law, that says that the radius vector sweeps out equal areas in equal times. Thus the angular speed is inversely proportional to the square of the length of the radius vector. If b denotes the semi-minor axis the average r should satisfy $\frac{1}{2}r^2 2\pi = \pi ab$ i.e. $r = \sqrt{ab} = a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$ where e is the eccentricity. In the case of the Moon it works out as 383,800 km (marginally different). Thus the angular speeds should be modified by the factors $\frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{3}{2}}}$ at perigee and apogee respectively, which in the case of the Moon amounts to 1.118 and 0.897 respectively which means $0.614''$/s and $0.493''$/s for the synodic speeds. As to the sidereal we should make the appropriate subtractions and get $0.573''$/s and $0.452''$/s. [6]. But this is not the the whole story, there is also a modification due to the rotation of the Earth and the ensuing parallax. This is most marked around the equator and negligible in the Arctic regions.

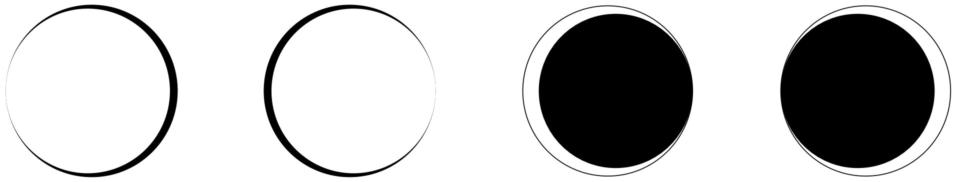


The angle is that of the apparent diameter of the Earth as seen from the center of the Moon, which is about 2° (average $1°54.59'$, while $2°1.35'$ at perigee and $1°48.54'$ at apogee) which is transversed in 12 hours (or 11 h 58 m to be more exact), thus at the average distance the average angular speed is $\frac{1}{6}^{\circ} = 10'$ an hour or more exactly $0.16''$/s in the retrograde direction. In fact that speed varies and is a maximum in the middle by a factor of $\frac{\pi}{2}$ thus it amounts to rather exactly $0.25''$/s halving the speed of the Moon relative the Sun and hence extending the totality of the eclipse. Those are significant effects and enabled the Greeks to determine rather accurately the distance to the Moon in terms of Earth radii.

The average apparent size of the Moon's diameter is 0.009 radians [7] which translates into 0.51783° (31.07 arc minutes). The average apparent diameter of the Sun is however 32.01 arc minutes, so on the average the Moon does not quite cover the solar disc. However the distance to the Moon varies markedly, at its closest it is at a distance of this corresponds to apparent diameters of $32.94'$ and $29.46'$ respectively. The variance of the Sun is less marked. At aphelion of the Earth's orbit we are talking about 152,100,000 km, while at perihelion 147,095,000 km corresponding to $31.48'$ and $32.55'$ respectively. Now those values are from the center of the Earth and will vary depending on where you are situated. However, in the case of the Sun the difference is marginal, not quite so in the case of the Moon. When the Moon is at Zenith we get the largest apparent diameter which is $33.53'$. Thus under the most favorable circumstances at the perigee of the Moon and the aphelion of the Earth there is a discrepancy of $2.05'(=123'')$

[6]This has a consequence that the sidereal periods differ significantly. Thus the period between say two New moons differ depending on where in the orbit the New Moon happens to find itself. As it takes 2.2 days to catch up, a ten percentage difference each side make up twenty percent, so the discrepancy can be up to 10 hours!

[7]The average distance (the semi-major axis) being 384,399 km and the diameter of the Moon 3474.2 km, we simply divide the second with the first getting a good approximation of the arc length.



For the convenience of the reader let us summarize the discussion so far in the following table as well as presenting useful information for future references.

	angular sidereal	angular synodic	max parallax	effective	sidereal m/s	synodic m/s
average	0.549	0.508	-0.250	0.258	1022	946
perigee	0.614	0.573	-0.265	0.308	1079	1007
apogee	0.493	0.452	-0.237	0.215	968	888

From this we conclude that during the most favorable circumstances the duration of totality is 399 seconds or 6 min 39 seconds, For this to happen the centers of the three bodies should be aligned, you should be situated on the equator, and the eclipse will have to take place at noon with the Sun and Moon at zenith, i.e. during one of the equinoxes.

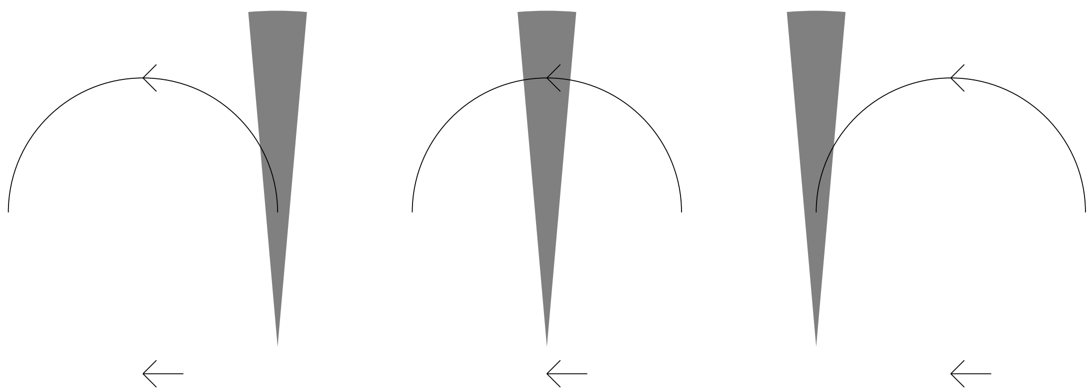
External View

Given two spheres one of illumination one serving as an eclipsing object, of diameters D and d respectively at a distance L from each other, they will define two cones with apses A and A' respectively, at distances ℓ and ℓ' from the center of the illuminating sphere.

If $\mu = D/d$ similar triangles give that $\ell = \frac{L}{\mu-1}$. If A_S, A_M denote the distances from the center of the Earth to the Sun and Moon respectively, then clearly $L = A_S - A_M$ but what we are really interested in is the distance of the apsis to the center of the Earth. This will work out as

$$\frac{A_S - \mu A_M}{\mu - 1}$$

This clearly is zero when the apsis is at the center of the Earth, when it is positive the apsis will be beyond the Earth and there will be an eclipse, if negative, or rather less than the negative radius of the Earth there will be none. The maximal value will occur when A_S is as large as possible, and A_M as small. This will amount to 16823 km compared to the (equatorial) diameter of the Earth which is 12,756 km. The angle at the apsis is the same as the common extension, which is about half a degree. At the most favorable, we are looking at a cone intersecting at the equator 23,201 km distant, the intersection will have a diameter of about 202 km. The apsis will move at a speed equal to that of the Moon in its synodic revolution which is about 1000 m/s, but the Earth will rotate in the same direction and at the Equator this is about 500 m/s (or 463 m/s). Thus the totality will last up to 400 s, meaning almost seven minutes, this tallies with what we got before. Of course given the table above we can make a more accurate computation. Now let us describe a most favorable situation. This occurs at the equinoxes, and the shadow of totality with a width of about of about 200 km moves at a constant speed of about 1000 m/s (1007) with respect to a diameter. This is of course the speed of the apsis relative the center of the Earth and in fact the synodic speed, but with varying speed along its path. Very fast at sunrise and sunset, when also the shadow is quite elongated, slower at noon.



Thus the full extent of the eclipse will be about 3 hours 32 minutes and 36 seconds. It will trace a part of the equator of an extension of $126°51'$. Let us describe a possible scenario:

On September 21 3742 the eclipse will start at local time 6 am in the middle of the Atlantic between South America and Africa at longitude $26°7'3''$ West and at the equator. One hour and forty six minutes and 18 seconds later it reaches Mt Kenya at $37°18'27''$ East, where the eclipse is of maximal length and occurring at noon local time. It will end just by sunset south of the coastline of Sumatra at the equator and longitude $100°43'57''$

If the three centers are still aligned but it does not occur during an equinox, the shadow still traces a part of a great circle but maximal totality will be shorter at the most favorable spot. If the apsis is slightly off-set from the line joining the Sun and the Earth the totality will describe a small circle arc and the extent of the eclipse will be more limited both in local time and overall.

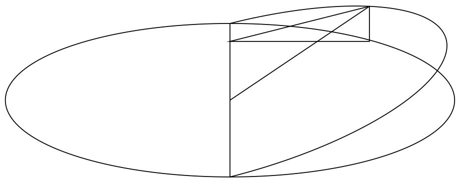
Frequencies

The scenario described above does not occur. If it would occur it would mean that the orbital plane of the Moons orbit would coincide with that of the equatorial plane. If in addition the orbital plane of the Earth would be the same, we would have Solar Eclipses at each New Moon, and thus their occurrences would be eminently predictable, only where along the equator they would occur would be of some interest. Furthermore there would be no seasons, days would always be equal in length to nights, and it would be quite hot at the Equator. Boring? Anyway the upper limit I gave for the length of totality is not sharp. Can it be sharpened significantly?

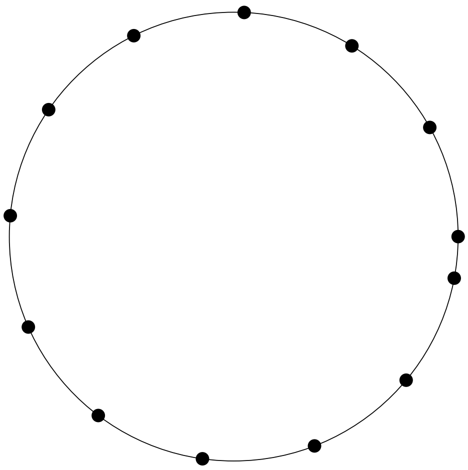
The orbital plane of the Moon is somewhat tilted with respect to the Earth. The tilt amounts to $5.145°(\mu)$. The two planes intersect in a line, which will intersect the celestial vault in two antipodal points, one of which corresponds to where the Moon ascends from below the Ecliptic to above (with respect to North) and is called the ascending node. In other words, while the Sun traces out the Ecliptic the Moon will trace out another great circle, and we are talking about their antipodal intersection points. That line is regressing one revolution in 18.6 years, which means that we are talking about a precession which is completed in a relatively short time as opposed to the precession of the Earth axis, when we are talking about 26,000 years. The plane generated by the moving apsis of the eclipsing cone (which we may assume is linear) and the Sun will actually be the same as the orbital plane of the Moon (around the Earth). It will cut out a circle whose center will occur in a limited region. In fact the angular distance ν between the normal of the Equatorial plane and that of the Moon varies between $E+M$ and $E-M$ where $E = 23.5°$ and $M = 5.145°$ i.e roughly between 28.6° and 18.3° the extremes being known as lunar standstills. Would we have $\nu = 0$ the rotational direction and that of the direction of the moving shadow would coincide, and hence the rotation would have maximal effect in trying to catch up. As it is we have to compute the component of the rotation in the direction of the path of the shadow, which means scaling with $\cos\nu$. In the most favorable case we would have a scaling of 0.95 at the point where the path crosses the equator. Our calculations would only be marginally affected[8]. The biggest difference occurs when the plane does not intersect in a great circle and the smaller the circle and the closer to the poles the shorter the duration locally as well as globally, and at fewer places will it be visible.

Now in order to have an eclipse the New Moon will have to be close to the node. How close? If the angular difference is given by θ the distance of the Moon from the line joining the Sun and the Earth will be given by $A\sin\mu\sin\theta$ where A is the distance to the Moon.

[8] In the previous case we considered a movement of $1007 - 463 = 544$ m/s across a circle of 200 km, while in the actual case it will be $1007 - 440 = 567$ m/s. This corresponds to 6 m 11 s and 5 m 56 s respectively



In order for an eclipse to occur this distance cannot exceed that of the radius of the Earth. Thus at apogee θ needs to be smaller than at perigee. At average $A = 384,000$ km, this amounts to $10.7°$, while at the perigee ($A = 362,600$ km) and apogee ($A = 405,400$ km) we will get $11.35°$ and $10.14°$ respectively. The average angular distance between two New Moons will be given by $360° \cdot 19/235 = 29.11°$ (recall 235 "months" in 19 years) had this been less than $20°$ we would have expected two solar eclipses per year, about six months apart, but never more, but now there will be years when there will be only one, when the node falls almost in the middle between two New Moons (i.e. at Full Moons).



Twelve New Moons make up almost one revolution, but there is a discrepancy of almost $11°$. In the interval of two successive New Moons there will be a window in the middle of about $8°$ after half a year there will be a deplacement of about $5°$ which is less, thus there will indeed be exceptional years where there will be no eclipses at all. The interested reader can easily compute the frequencies of the three different types of years.....

Finally one should really take into account the precession of the nodes. In fact 18.6 years is close enough to 19 years to have a cycle, discovered empirically a long time ago and referred to as the Saros cycle. The Greeks knew enough to have been able to do the calculations I have sketched, but of course they would not have been able to pinpoint actual occurrences (time and place) with such precision, at least not long in advance, but enough so to startle the general population would an eclipse be soon coming on location.

As a Post Scriptum we may note that in astronomy everything is in a flux. The eccentricity of the orbit of the Moon is not constant but varies between 0.077 and 0.026 which means that at the extreme value there is a rather marked difference between perigee and apogee. Furthermore the inclination of the orbit with regard to the Ecliptic likewise varies between $4.99°$ and $5.30°$. Those variations tend to be cyclical due to the cyclical nature of perturbations. Of course in a very long run those limits will be irrelevant as the Moon is slowly drifting away from the Earth, and will, as was already noted initially, escape altogether.

Watching solar eclipses 1945–2017

Christer O. Kiselman

On 2017 August 21, I saw a total solar eclipse in Glendo State Park, Wyoming. The sky was clear, the corona magnificent.

I could have stopped here. You can stop reading here, the main message being already delivered.

However, I will write a little more.

Eclipse of 2017 August 21

In the morning of August 17, at 05:07 local time (03:07 UT), while still in my home in Uppsala, I started the excursion by taking some photos of the moon, which was ostensively and accurately aiming for the sun. I then travelled to Denver, CO. The plane landed at 15:38 local time (21:38 UT), only 3 minutes after schedule. I came out from the airport at 17:25, 1 hour and 47 minutes later.[1] I had rented a car: I chose a Chevrolet compact car, much resembling the Citroën C4 I drive in Europe, and equally comfortable and easy to drive.[2] I drove in the evening to Douglas, WY, (elevation 4,836 ft, 1,474 m), arriving around 23:00 (August 18, 05:00 UT). The distance from Denver to Douglas is about 217 mi.[3]

The next day I travelled to Casper, WY, (elevation 5,150 ft, 1,560 m), which was actually the first place I had planned to be at. (Also Madras, OR, was a location I thought of early.) On my way to Casper I stopped to see Ayres Natural Bridge south of Interstate Route 25.

Later the same day I drove to Orin (a place with a rest area; elevation 4,705 ft, 1,434 m), and Glendo (elevation 4,724 ft, 1,440 m). I looked for suitable parking spaces and rest areas along Interstate 25.

It seemed to me that Glendo State Park would be the best location of the places I had visited.

On August 19 I drove to Laramie, WY, now entering Glendo State Park on the way. Bennett Hill was a place recommended by two very helpful guides in the park. (Distance Douglas – Laramie 146 mi; time 2 hours and 13 minutes.)

I stayed three nights, August 19–22, in Laramie (elevation 7,165 ft, 2,184 m).

On the day of the eclipse I started at 02:04 local time (08:04 UT) from Laramie, driving along US Route 30 = US Route 287 and then along Wyoming State Route 34 and Interstate 25 without any problem. (On Wyoming 34 I saw two cars going in my direction and none in the opposite direction.) I stopped for a minute on Wyoming 34 and could see the Milky Way for the first time in several years. I arrived to the park at 04:31. Michael H. F. Wilkinson

[1] This is an all-time record, surpassing the time spent in all other countries I have entered, including several sub-Saharan countries in Africa.

[2] I drove a lot during my first visit to the US, from July 1965 through July 1966, in particular across the continent from Princeton, NJ, to La Jolla, CA, in June–July 1966, and the habit had not vanished.

[3] 1 mi = 1 mile = 5,280 ft = 63,360 in = 1.609344 km = 1,609,344 mm exactly.

was also there, with two telescopes, and I stayed close to him. He took a tremendous amount of photos and could capture the Diamond Ring effect, also known as Baily's beads effect.[4]

From Xavier M. Jubier's interactive map I take the following data as input, trying to use the spot where we were, a few hundred meters to the southwest from Bennett Hill and about 2 mi (a little more than 3 km) from the central line: At latitude $42^\circ\,30'\,39.90''$, longitude $105^\circ\,00'\,00.41''$, the eclipse started at 10:24:03.2 local time (16:24:03.2 UT), the total phase at 11:45:07.2; the maximum was reached at 11:46:21.2, the end of the total phase occurred at 11:47:34.9, and the end of the partial phase at 12:12:14.8.[5] The duration of the total phase was 2:27.7.

The corona was magnificent, and much larger than during the eclipse of 1999. Indeed a wonderful experience! I could see no prominences. Michael, however, could take a photo showing a few small prominences.

As I remember, it was considerably darker during totality in 1999 than in 2017. (However, what is a memory worth after 18 years?) Maybe this was due to slightly more haze in 2017. A smaller shadow could not be the explanation, since the maximal path width near Albena in 1999 was 113 km and Albena was a bit away from the central line (indicated by the fact that duration was 1:49 as opposed to the maximum of 2:23), while the path width at Glendo was 109 km with a duration of 2:27. The sun's altitude at the two locations was 59° in 1999 and 55° in 2017, thus not very different. We may conclude that the maximal distance in 2017 from the point of observation to the penumbra was quite similar to that in 1999.

There were four planets that could theoretically be seen. Listed from the left they were: Jupiter (about 47° to the east of the sun), Mercury (about 8° to the east of the sun), Mars (about 8° to the west of the sun), and Venus (about 34° to the west of the sun). Of these I saw only Venus, the most brilliant. Maybe I did not look carefully enough; maybe the slight haze made the other three more difficult to see. Michael has a photo showing Mercury.

I did not see any shadow bands:[6] the ground consisted of sand and grass, and so was too irregular to allow for this kind of observation.

Not only the moon was between us and the sun: all of a sudden, seven pelicans flew in front of the sun. I saw them on Michael's computer screen, he filmed them and put the result on Youtube:[7]

`https://www.youtube.com/watch?v=2E_6_E-8fE0`

Due to all the cars, I could not leave the park any time soon after the eclipse had ended; only at 18:05, almost four hours after the end, did I leave the park. By then there were no longer cars queueing in the park—but outside. In order to avoid Interstate 25, I first planned to drive along smaller roads to the east of that highway, but somebody told me that traffic there

[4]Named for Francis Baily (1774–1844). The phenomenon is caused by rays passing through valleys in the moon's mountains.

[5]The precision is exaggerated. One hundreth of an arc second in latitude is about 1 ft or 30 cm. Of course I cannot indicate our location so exactly. One hundred meters east or west would give a difference in time of about 0.13 seconds, since the speed was 751 m/s.

[6]Shadow bands are thin wavy lines of alternating light and dark that can be seen moving and undulating in parallel on plain-coloured surfaces immediately before and after a total solar eclipse.

[7]If you look at the pdf file, it is probably safer to write the address by hand rather than clicking on the address.

was proceeding at 20 miles per hour, which seemed good enough, so I entered it. However, traffic was extremely slow, not anywhere near 20 mph, so I left Interstate 25 at Exit 100 and drove Wyoming 117 and Wyoming 320 to Wheatland, and from there Wyoming 34 and US Route 30 = US Route 287 again. I arrived at my apartment in Laramie at 22:01, after a drive of 112 miles. At 02:36, August 22, Michael sent me a message that he had arrived at Estes Park, CO.

I wrote several sms to Sweden; the first one at 08:12. Some of them just failed; the others were put on hold and sent away at 16:04, i.e., after a delay of almost 8 hours for the first one. (It seems the system was overloaded because of all the people using telephones in the park.)

On August 22 I visited the Art Museum of the University of Wyoming in Laramie before going south to Thornton, CO, close to Denver, where I stayed in a motel during the last night, 22–23. On August 23, I visited Denver Art Museum, returned the car some miles from the airport,[8] and flew from Denver to Frankfurt; the following day to Arlanda.

I arrived safely to my home in Uppsala on August 24, at 16:01 local time (14:01 UT), after almost 23 hours of travel from the motel in Thornton.

Both before and after the eclipse I corresponded with two friends in addition to Michael: one of them saw the eclipse successfully in Tetonia, ID, (elevation 6,047 ft, 1,843 m), close to Grand Teton National Park in Wyoming; the other, equally successfully, in Mitchell, OR, (elevation 2,777 ft, 846 m).

Eclipse of 1945 July 09

This eclipse, the first I had seen, was total in the north of Sweden, e.g., in Bjuröklubb, but I saw it as partial at Boardinghouse Kairo in Upplands Väsby, a little north of Stockholm. My father had rented a cabin there for the whole summer vacation—for 250 SEK. He provided us children with pieces of window glass, one side of which he had (carefully) covered with soot from a candle. He advised us to hold the glass so that the side with the soot faced the sun, not so that it touched our noses.

Lyell McConnell saw this eclipse in Wyoming, also there as a partial eclipse, two hours before me. This I was to learn 72 years later when I happened to meet her in Laramie in August 2017. She is Michael Ward's aunt—Michael was my host in Laramie.

Eclipse of 1954 June 30

I travelled to Persnäs in the island of Öland, on the central line, with my Newtonian reflector, the 6″ mirror of which I had made myself, while my father had made almost all the rest—a heavy load on the train, on the ferry boat[9] to the island, and on the railbus[10] towards the northern part of the island.

The day of June 30 was cloudy, but at one moment the clouds were somewhat thinner, so I could see the brightest (innermost) part of the corona and a small prominence, and took a picture of them.

[8] I drove more than one thousand miles during the week.
[9] A bridge from mainland Sweden to Öland was opened in 1972.
[10] Rail traffic on the island ceased in 1965.

Many astronomers from Stockholm Observatory were there, including Bertil Lindblad (1895–1965) and Yngve Öhman (1903–1988), as were astronomers from many other countries. The concrete foundations used for the instruments remained in the field of the observations even after several decades.

Åke Wallenquist (1904–1994), from Uppsala University and Kvistaberg Observatory, chose Gotland instead, where totality was somewhat shorter—but saw the eclipse without clouds.

Eclipse of 1990 July 22

I travelled by car with Marianne Ståhlberg to a place close to Joensuu on July 21. We spent part of the night in a tent. The sky was covered by heavy clouds, and we could experience nothing but darkness.

Eclipse of 1999 August 11

Marianne and I travelled to Varna; we stayed in a hotel in Св. Константин, Albena, just north of Varna. My oldest son Dan Kiselman, his wife Ingela Kiselman and their daughter Klara (two and a half), and Ingela's parents Gunnel Ericsson and Sven Georg Ericsson were there too, as was Sabira Ståhlberg, Marianne's daughter, and Sabira's friend Saŝo (Александър Шиваров, Aleksandăr Šivarov). We were standing on the roof of Hotel Tervel, 60 meters from the Black Sea. The totality lasted 1 minute and 49 seconds there, as opposed to the maximal duration of 2 minutes and 23 seconds. The sky was perfectly clear but perhaps there was a very slight haze. An absolutely marvelous experience, really unforgettable, especially in view of the less successful excursions in 1954 and 1990. I got an impression of the planetary system as a three-dimensional structure. That the sun dominates this system was evident: I saw Venus and Mercury and other planets in obedience. See my two publications (1999a; 1999b), which are available at my web site.

I could also see shadow bands during a few seconds just at the end of totality. They vibrated on the bright floor and on the walls of the terrace. The wavelength was about 15 cm, 6 in. The contrast between the dark and bright parts was very weak.

A three-generation project

My father Sam Svensson (1896–1966) was very knowledgeable in astronomy. He started his professional life as a sailor already as a young boy, then educated himself to become a First Mate, Master Mariner, and Navigation Teacher (diplomas obtain in 1922, 1923, and 1924, respectively). He studied astronomy at Stockholm University College. On 1930 December 02 he was examined by Bertil Lindblad and obtained what corresponds to today's 30 ECTS Credits. He taught me a lot, to the effect that I can say that I learnt spherical trigonometry (the geometry of rays) before I learnt plane trigonometry.

Already as a child, I knew that there would be transits of Venus in 2004 and 2012. I thought of this as something in a very distant future. Now both years are behind us—and I have seen two transits of Venus.

On 1958 June 23 I was examined by the very same Bertil Lindblad, whom I had known since 1954, and obtained what corresponds to 60 ECTS Credits.

Then, on 1993 June 01, my oldest son Dan Kiselman got a PhD with Bengt Gustafsson as advisor, and is now a docent and lecturer at Stockholm University. He is a member of the Swedish National Committee for Astronomy (former President) and Secretary of the Swedish Astronomical Society. There is a planet Kiselman, number 12673, discovered by Clas-Ingvar Lagerkvist on 1980 Mars 16 at La Silla and named for Dan . . . well, actually it is an asteroid, only 7.837 kilometers in diameter . . .

It took three generations to reach this far.

References

Kiselman, Christer. 1999a. Eklipso de la suno. *Kontakto*, No. 172 (1999:4), p. 9. (Item 99-i in my web site).

Kiselman, Christer. 1999b. Suna eklipso 1999 08 11. *Fonto* **19**, No. 227, November 1999, pp. 30–31. (Item 99-iv in my web site).

Appendix: Some solar eclipses 1945–2024

Date	*Maximal length of totality*	*Where*
1945-07-09	1:15	Total in the north of Sweden. I saw it as partial in Upplands Väsby.
1954-06-30	2:35	Persnäs, Öland. Cloudy; however, I could take a photo of the corona and a small prominence.
1990-07-22	2:33	Near Joensuu. Completely cloudy.
1999-08-11	2:23	Св. Константин, Albena, just north of Varna. Clear sky, maybe a very weak haze.
2008-08-01		Total in Russia and China. Saw it as partial in Uppsala.
2015-03-20		Total at Tórshavn. Saw it as partial in Uppsala.
2017-08-21	2:40	Glendo State Park, Wyoming. Clear sky, but a slight haze.
2019-07-02	4:33	Chile and Argentina (near Buenos Aires).
2020-12-14	2:10	Chile and southern Argentina.
2024-04-08	4:28	Mexico and USA.

11:e ISAAC-kongressen vid Linnéuniversitet, Växjö, 14-18 augusti 2017

Joachim Toft

Enligt oss arrangörer förlöpte kongressen väl och i huvudsak enligt planerna. Totalt samlades nästan 300 deltagare från Jordens alla hörn. Föredragen och speciellt huvudföredragen (plenary talks) hölls på en hög vetenskaplig nivå inom olika intresseområden inom ISAAC. Som lokala organisatörer var vi nöjda med att kunna erbjuda huvudföredrag på sådana höga nivåer. Många av huvudföredragshållarna kom dessutom från de nordiska länderna. Samarbetet med stödjande organisationer, däribland Svenska Matematikersamfundet, har fungerat väl.

Den ursprungliga schemaläggningen stämde väl överens med den faktiska och vid två tillfällen per dag kunde deltagarna förfriska sig med varma drycker och tilltugg.

Konferensutflykten med tillhörande kvällsvard gick till Kosta glasbruk och dess hyttsill, där det blev ganska mycket svensk husmansstuk kring maten. Här kunde de som så önskade prova på lite glasblåsning.

Vid sidan om själva kongressaktiviterna kunde deltagarna även:

- Möta svensk matematikhistoria genom ett föredrag av Anders Tengstrand;
- Åka med ångaren Thor på Helgasjön (största sjön kring Växjö);
- Delta i 'Mattefredags' tävling, genom Maria Ulam och Miguel Perez.

För ytterligare information, se kongresshemsidan:
`https://lnu.se/en/research/conferences/previous-conferences/isaac-2017/`
där det även står lite om den mediala rapporteringen av kongressen. Kongressbilder m.m. kan erhållas genom länken:
`https://lnu.box.com/s/dr3ib7j2766xoqj54mp44dxcg07n6yhi`

Lite om ISAAC:

ISAAC står för **The International Society for Analysis, its Applications and Computations.**

ISAAC bildades 1994 i Delaware, USA, för att uppmuntra och främja matematisk analys, dess tillämpningar och dess växelverkan med beräkningar och tillämpningar. Organisationen är en internationell ideell förening, d v s ej vinstdrivande. Dess första president var Robert P. Gilbert från Delawares universitet i USA. Presidenterna sitter två år i taget och maximalt 4 år. I samband med ISAAC-kongressen vid Linnéuniversitetet (i Växjö) lämnade Luigi Rodino från Turins universitet i Italien över presidentstaven till Michael Reissig från Tekniska universitetet, Bergakademi, i Freiberg, Tyskland.

Insom ISAAC finns speciella intressegrupper som organiserar mindre konferenser såväl vid sidan av som del av ISAACS allmänna kongresser. ISAAC stödjer även andra konferenser, samt sommarskolor och forskningsutbyten av allehanda slag. ISAAC har idag drygt 300 livstidsmedlemmar världen över.

Just nu försöker vi genomdriva en del förändringar kring ISAAC.

- Den gamla webbsidan

  `http://www.mathisaac.org`

  skall vi försöka ersätta helt och hållet med en under upparbetning:

  `http://www.isaacmath.org/home/`

  (Här finns ytterligare information om ISAAC.)

- Den gamla registreringen i USA av organisationen förföll p g a höga avgifter. Vid styrelsemötet som hölls i Växjö i samband med den senaste kongressen bestämdes att förnya registreringen av ISAAC i Sverige. (Detta bl a för att det visade sig vara allra enklast att registrera den i Sverige jämfört med de andra länderna som vi kollade upp. Dessutom är registreringen helt gratis). Detta har nu gjorts och ISAAC har därför sedan en månad tillbaka adressen Linnéuniversitetet, Sverige.

- När efterverkningarna av registreringsprocessen lagt sig och upparbetningen av webben kommit lite längre är det tänkt att ISAAC skall undersöka och se om intresse finns bland andra matematikorganisationer (däribland SMS) angående utökat samarbete.

◇ ◇ ◇ ◇

Om SMS Årsmöten

Arne Söderqvist

Nedanstående synpunkter formulerade jag även som en motion till årsmötet 2017.

SMS årsmöten brukar hållas i början av juni, på olika platser i Sverige. Endast ett fåtal av medlemmarna har möjlighet att delta i årsmötena. För många innebär ett deltagande en lång resa och dessutom är arbetsbördan intensiv, med tentamensrättning och resultatrapportering i början av juni månad. Beslut genom medlemsomröstning på årsmötena blir därmed problematiskt, eftersom det lilla antalet närvarande medlemmar knappast kan anses utgöra en beslutsmässig skara.

Jag föreslår härmed att motioner som ska behandlas på årsmötena i god tid ska publiceras på SMS hemsida. Jag föreslår också någon form av elektronisk omröstning, i likhet med vad vi en gång hade beträffande Samfundets logotyp. Hur problemet med en medlem – en röst och hur rösterna ska gå att knyta till rätt medlem, kan lösas genom att de röstandes namn publiceras på hemsidan. Då kan varje medlem reagera om någon annan skulle rösta i hens namn. Det skulle också vara möjligt att ändra sitt val, om så sker innan röstningsperioden ska anses vara över. Någon valhemlighet att värna om kan det knappast bli fråga om i detta fall. Enligt den nuvarande ordningen sker ju omröstningen med handuppräckning på årsmötena.

Jag tror att mitt förslag, om det genomförs, kan få fler medlemmar att känna sig delaktiga i Samfundets verksamhet.

ï»¿

Category Theory – lösningen för grundskolans matematik?

Leif Önneflod

Den här artikeln vänder sig till dig, som känner att något slag av paradigmskifte är nödvändigt för att göra matematiken lättare att förstå i undervisningen.

"No convention is sacrosanct. Every convention is artificial, and as such, should be kept only if it continues to serve a purpose." (H. Wu, Berkeley)

Inledning

Det har gått mer än hundra år sedan vi fick en abstrakt teoretisk grund för aritmetiken. Under mer än hundra år har den misslyckats att göra matematiken begriplig för flertalet elever. I mer än hundra år har man försökt lösa problemet med hjälp av bättre didaktik.[1]

Att förstå matematiken handlar om att uppfatta *strukturer* – inte bara att "känna igen" mängder av problemsituationer och lära sig hur man löser dem. Tyvärr hade man i slutet av 1800-talet agendan att skapa en maximalt "abstrakt" teoretisk grund. Den kom därför i mycket att handla om strukturer hos *symboluttryck*. Sådana kännetecknas av en långt driven förenkling (vilket gör dem välgörande lättlästa), men där fattas något: De speglar inte fullt ut allt det, som behöver uppfattas för att kunna "göra matematik" av problemsituationer i verkligheten. Albert Einstein väckte tanken: "Everything should be made as simple as possible, but not simpler.", vilket man i vissa delar har gjort här. Han påpekade också: "It is the theory that decides what can be observed". – Långt driven abstraktion blir till sist kontraproduktiv.

Där finns horder av insiktsfulla didaktiker, som har försökt kompensera teorins tillkortakommanden med hjälp av egna "modeller" för hur olika sammanhang ska förstås. Att (på ett stringent sätt) anpassa modellerna till rådande teoribildning är mer eller mindre "knöligt". Modeller blir onödigt långsökta. Tankegångar i strid med teorin praktiseras, såsom att det skulle finnas två sorters divisioner: Innehålls- och delningsdivision. (Ett par illa valda termer i svenskan.) Teorin har stått i vägen …

Lösningen hittar man i idéer från en av de mer abstrakta och avancerade teorierna: Category Theory. Det är en teori för att analysera "det mesta". Den kan användas för att analysera strukturer hos begrepp, teorier och system (biologiska, dator-). Det borde inte överraska, att den här teorin är något att hålla i handen, när vi vill skärskåda aritmetikens grunder.

Den här essän ger något litet av grunderna för hur Category Theory (CT i den fortsatta texten) kan appliceras på själva *aritmetiken*. Att det jag tar upp skulle hjälpa eleverna är inte bara en åsikt jag har – det är något jag praktiserat i olika former och funnit fungera

[1] Låt mig påpeka, att jag inte på något sätt desavouerar didaktikens roll. Det finns ingen idé, som inte kan förstöras med lite "hjälp" av en värdelös didaktik, medan en god didaktik kan "lyfta" även dåliga idéer.

överraskande väl. Särskilt påfallande är hur *snabbt* eleverna uppnår förståelse.[2] Tidsvinsten uppnås till större delen av att eleverna inte behöver *öva* särskilt mycket. Eftersom de *förstår* kommer de dessutom ihåg bättre, och även *repetitioner* kan minskas väsentligt.

> *För läsarens bekvämlighet*:
> CT bygger på begreppet kategori. En kategori består av **objekt** (enligt någon definition) samt relationer mellan dessa, s.k. **morfismer**. (Greek: $\mu o \rho \phi \eta$ = form och $\iota \sigma \mu \alpha \varsigma$ en ändelse som substantiverar en handling. Det kan närmast översättas med "[om]formare".)
>
> Ronald Brown (prof. em., UK) anser[3] att morfismerna hellre bör benämnas **pilar** (arrows), eftersom de har en riktning, som kan sakna omvändning ("not bidirectional"). Det hela kan påminna om avbildningskonceptet, men har en generellare framställning.

När det gäller de generella **fördelarna med CT** framhåller Brown:
(mina kursiveringar) "This ... suggests that *comparison*, in many different guises, is essential for determining the basic classifications of objects, whilst *analogy*[4] allows the exploitation of ... matching of patterns, obtained by comparisons, to *suggest new questions* and possible logical linkages between 'contexts' or between objects. In fact, so essential is it, that the previous sentence is a bit strange since it is difficult to imagine any classification without comparison! Analogy and comparison also play key roles in the *formation of new concepts* and in the process of abstraction and unification, as we will see later."

Det här innebär att CT kan vara ett instrument för att utveckla och utvärdera teoretiska modeller. Resten av den här essän visar något[5] av hur det kan göras för aritmetiken.

Objekt i skolmatematiken

För att lägga en grund (enligt CT-principer) behöver vi fastställa vilka klasser av 'objekt' som behöver hanteras i grundskolans aritmetik. Till vår oförställda lycka visar det sig att där bara finns ynka tre klasser, jämte en fjärde, som senare kan härledas. (Vi väntar därför med den.) **Klasserna visar för vilka olika ändamål vi *använder* talen**. De är följande:

Kvantiteter – med kombinationen mätetal + enhet skapar vi *storhetsvärden* som anger storleken på något. Talen ger ett Mått på Mängden av något (eng. Measure = mått). Jag refererar till dessa tal (+ enhet) som M-värden i klassen MK. (M kan stå för "mängd" där detta motsvarar allmänspråkets tolkning av ordet – inte "mängd" som i "mängdlära".) M-värden visar **absolut storlek**.

---

[2] Det är kombinationen "fungerande teori" och "spetsdidaktik för problemlösning", som skapar effekten. (Det senare finns väl beskrivet.) Hur snabbt förståelsen kan utvecklas, avhåller jag mig från att sätta siffror på: det ligger för långt från erfarna didaktikers verklighetsuppfattning.

[3] Alla referenser till Brown avser hans och T. Porters artikel "Category Theory; an abstract setting for analogy and comparison", som finns som pdf-fil på hans hemsida www.groupoids.org.uk. I övrigt utelämnar jag referenser nästan helt – mycket av det jag tar upp är allmänt känt av de som följer forskning och debatt om matematikundervisning – och det är till er jag vänder mig. Annat gäller sådant jag själv tagit fram, och kan i det fallet referera till mig själv. Det vore möjligt att referera till en bok jag skrivit i ämnet, men den finns t.v. bara i en betaupplaga. (Boken besvarar annars alla frågor, som denna artikel kan tänkas väcka.)

[4] Brown har tidigare i texten beskrivit 'analogy' som ett samband/mönster mellan relationer, som beskrivs genom jämförelser. Man kan kanske säga att det är jämförelser av jämförelser.

[5] En *fullständig* redovisning omfattar en beskrivning av *alla* delar av grundskolans matematik. Det görs inte på ett tiotal sidor.

Skalärer – de består (i den enklare varianten) av *dimensionslösa*, reella tal. De visar "skalan" mellan två storlekar. (Räknesätten multiplikation och division används.) Dessa tal benämner jag S-värden och klassen för SK. (De här talen är i viss mening "rena tal" – ett omhuldat begrepp.) S-värden visar **relativ storlek**.

Så här långt känns allt säkert välbekant – men den tredje klassen är förbisedd i undervisningen, vilket har skapat flera av de förståelseproblem vi har idag. [6]

Lägen – med synonymen **tillstånd** – visar en talanvändning, där *elementen inbördes är inoperabla*. (Den här talanvändningen skrev Ulf Persson, prof. ma., en intresseväckande artikel om i Nämnaren nr 2, 2010.) Att värden kan vara inoperabla är ett välkänt fenomen vid gruppverkan (group action). Man kan ha en mängd X, där elementen inbördes inte har någon operation, och en grupp G, vars element kan "verka på" elementen i X. Exempel på "X" är punkterna i ett topologiskt rum, men också vardagsnära fenomen som temperaturer, höjd över havet, datum, tidpunkter, GPS-koordinater. Som Persson påpekade är de värden vi erhåller från en *addition* (av sådana värden) meningslösa, medan vi kan ge en mening åt en subtraktion. (Detta tas upp längre ned.) För dylika värden inför jag beteckningen L-värden och de är i klassen LK (eng: Level).

Alla exemplen på L-värden ovan utgör *storhetsvärden* (med enhet), så hur skiljer vi dem då åt från storhetsvärden som är M-värden? Det visar sig vara enkelt: ett L-värde bestäms numeriskt av *två referenser*. För att fastställa ett värde behöver vi, dels fastställa en *referenspunkt*, dels (alldeles som för M-värden) jämföra mot en *enhet* för att få ett värde på "avståndet" till referenspunkten. För temperaturer refererar vi till en "nollpunkt" och enheten fastställs som en bråkdel av förändringen mellan två referenspunkter. Ett annat exempel på referenspunkt är "havsnivå". För tidpunkter gäller att vi inte vet när "tiden började" i absoluta mått. Vi anger därför tidpunkter med utgångspunkt från godtyckligt valda referenspunkter med värdet noll (t.ex. midnatt). Samma sak gäller koordinater i alla koordinatsystem: vi har ett "origo" (med värdet noll i lineära system). Insikten, om att den här sortens storhetsvärden har **dubbla referenser**, gör inte bara att de lätt kan klassificeras – det leder också till en förståelse för deras begränsningar.

Så har vi då spikat tre grundläggande objektsklasser. Nu undersöker vi vilka "pilar" vi kan konstruera mellan objekt inom en klass.

Pilar (morfismer) i skolmatematiken

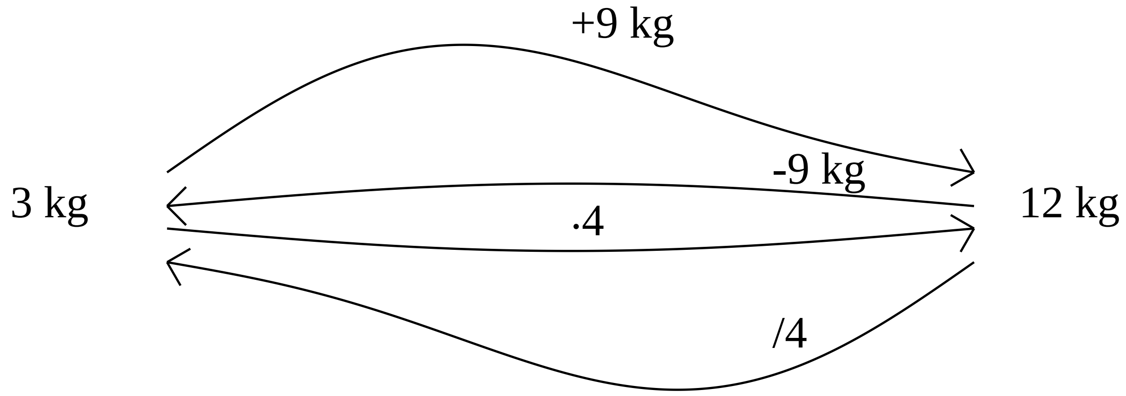
Eftersom en mer grundläggande användning av tal är att beskriva storlekar av fenomen,[7] så inleder vi med att **studera relationer mellan M-värden**. Dessa beskrivs, som tidigare nämnts, av kombinationen mätetal + enhet, kallat ett storhetsvärde. Här blir mätetal och enhet ömsesidigt beroende av varandra, när de ska beskriva storhetsvärdet. Ett storhetsvärde kan därför aldrig ensidigt förknippas med ett dedicerat, fristående tal.[8]

Låt oss se vilka **pilar** vi kan konstruera mellan objekten med M-värdena 3 kg och 12 kg

[6] Gäller inte bara elever. Även läroboksförfattare rör till det.

[7] Att "räkna" antal av något leder också till en storleksangivelse – den av en samlings (collection) storlek.

[8] Nu kan någon tycka att "antal" alltid beskriver en mängd exakt, men "antal" har även det en enhet, som är utbytbar, även om det ofta finns en naturlig *minsta enhet*. Enheten kan vara en gruppering av mindre enheter som för "tjog kräftor"; "dussin ägg"; 'plutoner" (grupper med soldater); "pallar" (lastade med paket). Valet av enhet beror, som alltid, på vad som är relevant att räkna i ett givet ammanhang.



Pilarna representerar operationer. Här används “de fyra räknesätten” för att ge (enkla) exempel på operationer som “omformar” det ena värdet till det andra.[9] Vi får pilar med värden ur två klasser: MK och SK. Sådana här figurer kan man träffa på i läromedel, men CT lyfter analysen av detta till en högre nivå. Brown skriver: “– various arrows are ‘ways of comparing [the objects]’ ”. – Det här är något av en kärnidé:

En pil beskriver en jämförelse.

Av texterna över pilarna framgår att 12 kg jämfört med 3 kg beskrivs av ‘+ 9 kg’ *eller* ‘$\cdot$ 4’. En viktig iakttagelse blir att jämförelsen är *operationell.* Det här stöds av språket på ett sätt som man inte alltid reflekterar över: Vi säger att 12 kg är “nio kilogram *mer*” än 3 kg. Gissa nu vilket ord vi får, om vi översätter ‘*mer*’ till latin! – Just så: det blir ‘*plus*’. (Och ‘mindre’ blir ‘minus’.)

När vi uttalar en jämförelse med ord, så nämner vi alltid något, vars storlek betraktas som känd (= ett referensobjekt) och berättar därutöver vad vi ska *göra* (= en operation) med denna storlek för att erhålla den storlek jämförelsen ska beskriva. I det här fallet beskrivs 12 kg av att det kan erhållas av att ta 9 kg *mer* (operationen ‘+’ maskerad i ord) än referensobjektet 3 kg. Alternativt kan vi ta 4 *gånger* så mycket. I det fallet framträder operationen tydligare i språket. (Uttrycket ‘/4’ kan man se som ett stambråk.) Allt det här går lätt att förmedla till yngre elever.[10]

De olika jämförande uttrycken (inklusive sina tecken) kallar jag **termer** respektive **faktorer**. I praktiken associerar en matematiker de flesta av talen i ett uttryck med operationer. (Ett visst tal “fungerar” som en minusterm, en faktor eller en divisor.) Att inkorporera tecknet i det som är en term och kalla t.ex. ‘+3’ för en plusterm gör ju inte ont precis. (Mer om det längre fram.)

Jämförelser i CT och skolmatematiken

Brown har naturligtvis synpunkter på nyttan av att identifiera objekt och pilar (relationer): “Central classical themes in Science include the classification of objects within a particular context. ... the possible hierarchical class structure has to be determined by *comparison.* ... Comparison allows us to build a specification of a concept or class. It is an essential feature of developing an ontology, within a subject area or amongst a group of

[9] Naturligtvis kan omformningarna göras hur komplexa som helst, men här ska en struktur för enkla operationer studeras.

[10] De yngsta eleverna, som jag har provat de här diagrammen med i större skala, var i en fjärdeklass. Vi la grunden för att *förstå* bråkräkningen på 6 lektioner. Optimalt hade nog varit att jobba 8 – 10 lektioner.

interacting individuals or agents. … We thus are left to conclude that 'comparison' is an important aspect of Mathematics, of Science, and, in fact, of general knowledge acquisition."

Det här betyder att **rätt förstådda jämförelser banar vägen för förståelse** av (berörda) grundläggande koncept. En multiplikation kan via jämförelser förstås utifrån *vad* den gör, inte *hur* den gör det (såsom när den uppfattas som "upprepad addition"). Eleverna kan laborativt fås att uppfatta den "skalära" aspekten av multiplikation. När pilarna går åt motsatta håll fås också (den efterlysta) förståelsen för hur multiplikation och division kan vara varandras *omvända* räknesätt. (Se figur ovan, för '$\cdot 4$' och '$/4$'.)[11] Jämförelser bidrar också till att tydliggöra de olika klasserna av talanvändning.

Vi saknar idag **en specifik terminologi för jämförelser**. Här ges ett förslag på en sådan. Ett lämpligt namn på "startpunkten" (referensobjektet) för pilen vid en jämförelse kan vara "**rot**" (R). Ordet har i alla sammanhang innebörden "ursprung", "det något kommer ifrån" o.d. Det visar sig också i en hel del matematiska sammanhang passa bra ihop med nuvarande användning av "rot".[12] För slutvärdet (målet) är termen mindre given. På engelska kan jag tänka mig "yield" (=avkastning, utbyte, resultat), men på svenska får det bli "**värde**" (V). Själva pilen kan rätt och slätt kallas "**ändring**" ($\tilde{A}$). (Brown ser pilarna som att de illustrerar en *dynamisk* relation. Det är ett synsätt som jag delar med honom och som harmonierar med de flesta verkliga sammanhang som pilarna ska illustrera.[13]) Vi använder beteckningarna i ett "diagram" för att beskriva en jämförelse:

$$V \xleftarrow{\tilde{A}} R$$

När elever tränar sig i att översätta till och från sådana här diagram (och ordinarie uttryck), så skapas en god förståelse för jämförelsens riktning; jämförelsens komponenter och jämförelsens operativa karaktär. Eleven kan utforska hur "roten" identifieras i språket, t.ex. av ordet "än". Eleven lär sig inte bara att uttrycka en jämförelse, utan kan översätta uttryck som "mer" till en operation. Får en elev veta att Kalle väger 4 kg *mer* än Kaled (vi jämför mot Kaled = roten), och att Kalle väger 48 kg, så är diagrammet givet:

$$\text{Kalle} \xleftarrow{\text{Jämförelse}} \text{Kaled} \qquad \text{d.v.s.}$$

$$48\,\text{kg} \xleftarrow{+4\,\text{kg}} \text{Kaled}$$

Nästa steg i lösningen kan eleverna lätt ta till sig: för att kunna utföra en beräkning, så måste pilen "ändra" på något vars värde är känt, och här är det Kalles vikt. Alltså måste vi

[11] Metaforen "upprepad addition" är ett hinder för att uppfatta division som ett omvänt räknesätt. Detsamma gäller ofullständigt beskriven "innehållsdivision". Till listan kan föras det som kallas "den monografiska metoden", där ett mycket försåtligt tankefel gör att den inte visar en "omvändning" på det sätt den utger sig för att göra.

[12] Här och i många andra fall måste jag tyvärr utelämna längre exemplifieringar och argumentation för att hålla den här artikeln inom rimliga ramar.

[13] Självfallet är det så att en fysisk företeelse, t.ex. en längd, inte kan "ändras" av t.ex. en faktor. Det är det abstraherade (sic!) *storhetsvärdet* som kan ändras. (Observera att ett mätetal varken kan vara mer eller mindre abstrakt än den enhet, som avgör vilket mätetal som gäller. Ett storhetsvärde är f.ö. fullständigt abstraherat från sitt fysiska sammanhang! (Det behöver inte existera i verkligheten.) Redan Aristoteles talade om abstrakta enheter.

vända pilen! Och **när pilen vänds, så vänds också operationen**! Vi får:

$$48\,\text{kg} \xrightarrow{-4\,\text{kg}} \text{Kaled}$$

Omvändningar är lätta att lära sig genom att rita diagram med pilar åt bägge håll och undersöka vilka ändringar som gäller. Observera, att förutsättningen för att operationen ska kunna vändas när pilen vänds, är att där *finns* en (utsatt) operation att vända.[14]

Här inställer sig frågan hur man ska koppla samman ett sådant här diagram med den faktiska beräkningen av det *ändrande värdet* ($\tilde{A}$). Hur jämför man t.ex. 0.38 h med 0.027 h? Lösningen på det är ett vackert exempel på hur viktigt det är med klara och tydliga definitioner. Arbetsgången är följande ...

När eleverna är varma i kläderna med att utföra både additiva och multiplikativa jämförelser laborativt och översatta till diagram (och vidare till ordinarie uttryck), så kan de också tillägna sig definitionen:[15]

En jämförelse visar vad jag ska *göra* med roten för att få värdet.

Eleverna finner det sedermera intressant att få veta att detta inte hindrar att jag "gör" mer än *en* sak! Så när en elev ska jämföra 16 m med 24 m (multiplikativt) kan eleven rita diagrammet:[16]

$$16\,\text{m} \xleftarrow{\cdot 2} 8\,\text{m} \xleftarrow{/3} 24\,\text{m}$$

Det här kallar jag **tvåstegsmetoden**.[17] De dubbla ändringarna kan utläsas "16 m är 2 ggr större *och* 3 ggr mindre än 24 m". Här står ordet *och* för en "komposition", vilket dock faller sig så naturligt för eleverna, att de inte behöver en särskild term för det. (Sättet som det uttrycks på här är inte så matematiskt stringent, men det är bara ett steg på vägen mot ett mer fullständigt språk.)

> Didaktiken för detta bygger på att ha korta arbetssteg och bara introducera *enstaka* nya element i varje. Det kan gälla en tankemodell, ett diagram eller ett fåtal termer. Detta både skapar en "rörlighet" i undervisningen[18] och gör att elever med dåligt arbetsminne inte förlorar överblicken. Arbetssättet bör vara elevaktivt, uppmuntra diskussioner och ge eleverna både frihet och ansvar. Arbetsgången behöver dock vara relativt styrd. Med en tydlig struktur för det matematiska landskapet kan läraren inse vilka vägar som leder mot målet. De tar man.

[14] Ett alternativ till detta är att berätta för eleverna, att man till 48 ska addera inversen, med avseende på addition, till det positiva talet 4. Att det är rätt metod framgår av den ekvation man kan ställa upp och lösa: $x + 4 = 48$. Ett bra alternativ ... eller? – Man kan också satsa på att träna upp elevernas "känsla" för hur man löser den här sortens problem. Tyvärr tar det tid och utgången är osäker. Det är svårt både för lärare och elev, att kommunicera runt vad man "känner på sig".

[15] Definitioner måste självfallet formuleras i klartext av och för eleven, och vara en aktiv del av undervisningen.

[16] Detta diagram ritar inte en elev spontant, men acceptansen förbereds väl. Den bakomliggande didaktiken tas inte upp här.

[17] Metoden är känd i olika former, men ingår här ett klart teoretisk *sammanhang*. Den blir inte bara en teknik för att lösa vissa problem (som man ska "känna igen"), utan eleven får också svar på alla sina "varför".

[18] Begränsat innehåll = kortvarigt arbete = oftare nya inslag.

Här är platsen att ta upp något om **neutrala element**. Med jämförelser som

$$8\,\mathrm{L} \longleftarrow 8\,\mathrm{L}$$

... kan eleverna upptäcka "neutrala" ändringar. Vi har de neutrala faktorerna[19] '$\cdot 1$' och '$/1$' och de neutrala termerna '$+0$' och '-0'. En följd blir att eleverna kan *förstå* att **likhet** kan beskrivas på olika sätt: med en **neutral term** eller med en **neutral faktor**. – Det ger en del implikationer. Ser du dem?

När tvåstegsmetoden och neutrala element har introducerats, så kan eleverna "upptäcka" hur man generellt kan finna de jämförande värdena med de metoder som traditionellt kallas "vägen över noll" respektive "vägen över ett". Eleverna har på det här stadiet fått ett fast grepp om att 'noll' bara är neutralt ihop med termer (additiva ändringar) och 'ett' bara är det ihop med faktorer (multiplikativa ändringar). Det räcker att, som ett *gemensamt begrepp* för dessa två "vägar" (och andra likartade), kalla detta för tvåstegsmetoden. – Vad eleverna ska fås att upptäcka är att en etta eller nolla "i mitten" trivialiserar valet av ändrande värde. Så här kan det se ut:

$$16\,\mathrm{m} \xleftarrow{\cdot\,16} 1\,\mathrm{m} \xleftarrow{/\,24} 24\,\mathrm{m} \quad \text{eller} \quad 16\,\mathrm{m} \xleftarrow{+\,16\,\mathrm{m}} 0\,\mathrm{m} \xleftarrow{-\,24\,\mathrm{m}} 24\,\mathrm{m}$$

Särskilt intressant blir det, när vi jämför dessa diagram med följande. (Obs riktningarna!)

$$16\,\mathrm{m} \xleftarrow{\cdot\,16} 1\,\mathrm{m} \xrightarrow{\cdot\,24} 24\,\mathrm{m} \quad \text{eller} \quad 16\,\mathrm{m} \xleftarrow{+\,16\,\mathrm{m}} 0\,\mathrm{m} \xrightarrow{+\,24\,\mathrm{m}} 24\,\mathrm{m}$$

I det vänstra diagrammet utgår vi från **en**heten och skapar storhetsvärdena med hjälp av *mätetalen*, som ju är faktorer. I det högra utgår vi från "ingenting" (avsaknad av längd) och får de bägge längdmåtten genom att "tillföra" dessa. Ur dessa bägge rader kan vi härleda en generell princip för alla jämförelser, som utförs med hjälp av neutrala element, och även vidare till alla andra tekniker för jämförelser. Formuleringen låter oss också formulera beräkningar för godtyckliga värden – inte bara med tillrättalagda dito, som kan lösas med tabellkunskaper eller "trixande". Principen är:

Om man beskriver de ändringar, som leder till 'roten' respektive 'värdet' utifrån ett *gemensamt* värde (som kan vara neutralt eller inte)**, så behöver *pilen till roten vändas*** (och därmed operationen!) **för att pilarna ska visa hur man kommer *från roten till värdet*.**[20]

Med denna beskrivning kan eleven se *mönstret* att rotens operation "vänds" vid en jämförelse.

[19] Det är helt nödvändigt att använda faktorbegreppet så här. Vi har att en 'term' kan vara endera en plusterm eller en minusterm. Vi behöver en samlande term för "multiplikatorer" (tungt ord) och "divisorer" – det bör vara 'faktor', eftersom vi knappast kan hävda att det är någon skillnad på '$\cdot 0.2$' och '$/5$'. Endera slaget av faktor skulle ju (analogt med termterminologin) kunna kallas 'gångerfaktor' resp. 'delafaktor' eller något mera latinskt i stil med '**profaktor**' resp. '**antifaktor**'. Att ha begrepp för talens *funktion* i uttryck är mer funktionellt och inriktat på förståelse än att, som nu, ha en terminologi för talens *placeringar* i förhållande till operatorerna.

[20] Med en mer "utvecklad" terminologi (som jag hoppar över här) kan det här formuleras mer kärnfullt.

Tillämpade jämförelser

Ett exempel: När vi startar från ett x_1 och "går till" ett x_2, så kan förändringen (differensen) Δx beskrivas av jämförelsen av x_2 med x_1: värdet x_2 kan skapas ur roten x_1 genom att först "eliminera" x_1 och sedan "tillföra" x_2 som med '$-x_1 + x_2 = x_2 - x_1$'. Här kan eleven *förstå* varför det är just värdet med index 1, som det ska subtraheras med. Man kan se hur differensen beräknar ett *riktat* jämförvärde.[21] Observera att med definitionen på jämförelse blir logiken i V.L. kristallklar. (till skillnad från H.L.). Uttrycket i H.L. förutsätter f.ö. kommutativitet, eftersom det (generellt) härleds från det vänstra. ($ax = b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b \Rightarrow bx = a$ -1 om kommutativt.)

Principen kan användas flexibelt. Ett alternativ till att jämföra 397 s med 402 s kan vara att använda diagrammet:

$$397\,\mathrm{s} \xleftarrow{\;-3\,\mathrm{s}\;} 400\,\mathrm{s} \xrightarrow{\;+2\,\mathrm{s}\;} 402\,\mathrm{s}$$

vilket sedan ändras till

$$397\,\mathrm{s} \xleftarrow{\;-3\,\mathrm{s}\;} 400\,\mathrm{s} \xleftarrow{\;-2\,\mathrm{s}\;} 402\,\mathrm{s}$$

Svaret blir $-3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s} = -5\,\mathrm{s}$, vilket översätts till "fem sekunder *mindre*".

Den här sista kompositionen av två ändringar kan vara värd en kommentar. Brown beskriver hur man ska uppfatta **komposition av pilar i CT**. Förenklat kan man säga att om en pil f leder från objekt A till B och en annan pil g vidare från B till C, så motsvarar kompositionen $g \circ f$ den pil som leder från A till C. När vi komponerar $-3\,\mathrm{s}$ och $-2\,\mathrm{s}$ kan vi undersöka vilken förändring vi får, om vi applicerar dem i tur och ordning på en rot, t.ex. 5 s. Vi får att $5\,\mathrm{s} - 3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s} = 0\,\mathrm{s}$. Kompositionen ska då motsvara den *ensamma* ändring, som gör 5 s till 0 s. Vi kan se att $5\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s} = 0\,\mathrm{s}$.

> Sådant här arbetar man inledningsvis med laborativt, för att tämligen omgående överföra iakttagelserna till diagram och vidare till konventionella uttryck. Laborativ materiel kan bara visa M-värden explicit. S-värden framgår implicit, men deras abstrakta relation till materielen måste betonas.[22] Begränsningen till M-värden gör att den laborativa materielen inte leder till generell abstraktion. Det är de diagram man härleder, som kan abstraheras vidare och ge generella principer. Observera att de *tecknade* uttrycken bara ska vara lätta att tolka och manipulera. Vill man visa matematiska strukturer kan även figurer och diagram av olika slag behövas.

Observera, att $-3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}$ inte handlar om att subtrahera 2 s från $-3\,\mathrm{s}$, utan om att komponera två "minskningar". I CT är det en helt normal företeelse att **komponera pilar**. Föreställningen om komposition är mycket fruktbar att överföra på uttryck med termer eller faktorer. Synsättet kan (för äldre elever) introduceras genom att ge eleverna i uppgift att sätta ut "rätt tecken" för varje tal i en summa, där talens ordning ändrats. Det kan se ut som: $5-4+3+2-1=3 \quad 5 \quad 2 \quad 1 \quad 4$. (Det här är förvillande för elever som är inställda på att räkna ut ett "svar".) Det eleven behöver se, för att kunna hantera ovanstående omflyttningar,

[21] Detta är ofta svårt att förstå för gymnasieelever. Man har tidigare lärt sig att jämföra 2 med 5 m.h.a. operationen $5 - 2$ (i st.f. $2 - 5$) och *säga* att det är *mindre* (i st.f. att ge svaret -3).

[22] Omedvetenhet om vad laborativ materiel *egentligen* visar, ökar risken att man misslyckas med materielen.

är att ett tecken alltid står *framför* det tal det berör och inte har något band till föregående värde. (Påfallande många tror att tecknet står *efter* det tal det berör! Andra tror att det står "mellan" talen.[23])

Tecknet talar om hur det efterföljande talet påverkar uttrycket i sin helhet.

Med en neutral nolla främst, får alla tal "tecken" och uttrycket kan tolkas enligt:[24] $\boxed{0}$ $\boxed{+5}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{+3}$ $\boxed{+2}$ $\boxed{-1}$. Det här kan, och bör, tolkas som en komposition av ökningar och minskningar, d.v.s. som "pilar" i CT. Detta har ett stöd i att även termerna på en tallinje behöver illustreras med (fysiska) pilar. Med den här synen på termer får eleverna lätt för att komponera dem i valfri ordning. Varför inte börja med '$-4-1$' (i föregående uttryck) och "kvitta" det mot $+5$?

> Vissa didaktiker beskriver ett sådant här uttryck som att det "egentligen" har strukturen $(+5) + (-4) + (+3) + (+2) + (-1)$. "Talen" inom parentes visas sedan som pilar på tallinjen. Men CT säger oss att (operativa) "pilar" *komponeras*.[25] Tolkningen som pilar innebär att additionerna kan tolkas som *kompositioner*, varför vi lika gärna kan skriva $+5$ -4 $+3$ $+2$ -1 för pilarna på tallinjen. I de fall uttrycket innehåller negativa tal, så är det så, som både Däcker et al och Hogben[26] menar, att den "verkliga" strukturen bakom $x-(-4)$ är $x-1\cdot(-4)$ alt. $x-4\cdot(-1)$. Av det följer att: om subtraktionen '-4' översätts till '$+(-4)$' kan inte '$-(-4)$' särbehandlas och lämnas oförändrat. Det ska översättas till '$+(-1\cdot(-4))$'. Metaforen "ett borttagande av en 'minus-pil' " (av '$-(-4)$') är i princip felaktig. Subtraktionen får i det fallet karaktären av "inversen till komposition", vilket åtminstone inte jag kan föreställa mig vad det är.

Observera att när ett uttryck som $a-2-b+5$ förenklas till $a-b+3$, så ska inte 'talet 5' adderas till det 'negativa talet -2' (eller någon annan märklig formulering), utan vi ska komponera en 'minskning med 2' med en 'ökning med 5'. Svaret blir inte ett "tal", utan en 'ökning med 3'. (Om nu talen i stället slås samman till '3' – hur ska man då *enkelt och transparent* förklara[27] varför detta tal ska *adderas* i '$a-b+3$'?) Det är uppenbart, att vi får

[23] Läraren kan lösa elevens problem (med att summor "blir fel" ibland) genom att instruera eleven att räkna "från vänster till höger". Det är ekvivalent med att säga: "Du ska inte utnyttja associativa och kommutativa lagen". Sådant löser stundens problem, men hur gör eleven med "$5+x-3$" ? Varför rådet "vänster till höger" fungerar så bra, ser man om parenteser för räkneordningen sätts ut: $((((5-4)+3)+2)-1)$. Varje tal får "rätt" tecken – det framför !

[24] Jag har mött erfarna lärare, som använder inledande nolla etc.

[25] Att komposition kan förväxlas med addition kanske har språkliga orsaker: "lägga ihop" pilar kan ju tyckas innebära att man adderar dem. De ska hellre ses som funktioner, som visar hur man kommer från en punkt till en annan. Funktioner *komponerar* man, även om funktionen är så enkel som $f(x) = x+3$. En sådan demonstrerar "pilen" som motsvarar additionen '$+3$' där x är en tidigare "pil" = term (eller, för LK såsom beskrivs längre fram, en tidigare uppnådd koordinat på tallinjen). Men att försvara den här ståndpunkten fullt ut, kräver bland annat en längre analys av komplexa tal. Jag låter CT stå för bilden av hur pilar och komposition hör ihop.

[26] Däcker, M. Hollsten, F. Kaminski E. Rådvall L. (2012) Undervisningen har betydelse – elevers kunskaper om algebraiska uttryck. *Nämnaren 2012 nr 2*, Göteborg: NCM.Hogben, Lancelot (1960) *Matematikens vägar*. Stockholm: Bokförlaget Forum AB.

[27] Och en "regel" är INTE detsamma som en förklaring! Inget barn blir lyckligt av att på sitt "varför" få höra en förälder svara "därför att vi har den regeln". Det förklarar ingenting. Inte heller om en lärare säger så.

en väsentligt enklare bild av omstuvningar av uttryck, när vi arbetar med operativa termer. CT visar att de är acceptabla och har en tolkning.

Uttryck med enbart faktorer kan också ses som en komposition av pilar. Vi tar det längre fram.

Omvändning och invers

Vi behöver en **symbol för omvändning av en operation**. I högskolematematik används ett upphöjt '-1' som generell symbol för att ange en "invers" av något. För de fall att vi har något av "additiv" karaktär kan inversen anges med '-'. Exakt vad inverssymbolen åstadkommer, beror på sammanhanget och vad en invertering avser måste ibland specificeras, t.ex. som "invers med avseende på multiplikation". I modellen för jämförelse "vänder" vi på rotens operation. Det är en betydligt mer specifik form av omvändning, och riktar sig inte mot "värdet", utan operationen. Det blir närmast trivialt att tolka.

> Med en symbol för att vända operationer behöver man inte, i samband med att man utvecklar förståelse för matematiska strukturer, samtidigt brottas med att försöka förstå de lite röriga och inte helt intuitiva sätten att använda division eller subtraktion (eller andra trix såsom 'invertering' och 'negering') för att skapa omvändningar. Dessa metoder beskrivs lämpligen först, när eleven har tillägnat sig behövliga begrepp och är teoretiskt mogen för det. – Idén först – hantverket sedan.

Jag inför **symbolen ∾ för omvändning**. Som symbol för '**jämfört med**' inför jag ※ .[28]

Vi kan nu i stället för '16 m jämfört med 24 m' etc. skriva: $16\,\mathrm{m}$ ※ $24\,\mathrm{m} = \cdot\, 16$∾ $\cdot\, 24 = \cdot\, 16/24$.[29] Det här skrivsättet har sina fördelar. Vi får ett både klargörande och koncist sätt att redovisa beräkningar av jämförelser. Ovan kan vi se att man vid en skalär (multiplikativ) jämförelse "bryter ut" de skalära mätetalen ur M-värdena och gör jämförelsen mellan S-värden. Att "bryta ut" är omvändningen till att S-Xvärden *skapar* M-värden ur enheter med den neutrala faktorn $\cdot\, 1$ som mätetal.

Vid jämförelsen $16\,\mathrm{m}$ ※ $24\,\mathrm{m} = +\,16\,\mathrm{m}$∾$+\,24\,\mathrm{m} = +\,16\,\mathrm{m} - 24\,\mathrm{m} = -\,8\,\mathrm{m}$ ($8\,\mathrm{m}$ *mindre*), så jämförs i stället de ändringar med M-värden som *skapar* M-värden utifrån den neutrala termen $+\,0\,\mathrm{m}$. Här upprepas ett (konkret) mönster, som kan generaliseras till andra element och operationer.

För att kunna utveckla diverse resonemang behöver man en **symbol för gruppering**. Normalt använder man bågparenteser för det enligt $5 - (3 + 1)$. Sådana är inte helt problemfria. Vill man omgruppera det här uttrycket, så finns det ett och annat att förstå för att landa i $(5 - 3) - 1$. Komplikationerna uppstår av att man kilar in vänsterparenteser mellan talet och framförvarande tecken som "tillhör" talet.[30] Tar man det nu på allvar,

[28] Symbolen ※ har jag använt i undervisningen, för att förenkla elevernas skrivande. Förenklingar uppskattas alltid.

[29] Efter ett tag känner inte eleven något behov av att skriva ut mellanledet, utan går (med förståelse) direkt på de två faktorer som visar jämförelsen. Ganska snart introduceras *skrivsättet* att ange ett faktoruttryck som en kvot (bråk). I täljaren placeras faktorer (inklusive tecken) i befintligt skick. Nämnaren är platsen för faktorer som ska fungera *omvänt* – alldeles som om de föregåtts av symbolen ∾.

[30] Ett uttryck med subtraktioner är inte associativt! Ändå kan man se kända didaktiker ignorera det. De kan skriva $8 + (5 - 5) = (8 + 5) - 5$ vid användningen av en "inskjuten nolla". Men det går ju lika bra att *subtrahera* en inskjuten nolla, varvid vi får: $8 - (5 - 5) = (8 - 5) - 5$, med samma teknik. Att tricket lyckas i första fallet (men inte i det andra) beror bara på att det är ett '+' som avskiljs från talet av ett '('.

att tecknet hör ihop med ett tal, så kan vi inte göra så. Som symbol för gruppering har jag valt att använda **hakparenteser**. (Det finns tunga skäl för det.) De används så här: $+5\,[-3-1] = [+5-3]-1$. Intressant nog försvinner *alla* de svårigheter, som en sedvanlig parentesexercis orsakar! N.B. att ett par hakparenteser *inte* innesluter ett "tal", utan ett uttryck som (i det här fallet) motsvarar en term (inkl. operator). Det här sättet att gruppera är både löjligt enkelt att hantera och lyfter fram strukturer i olika sammanhang.[31]

Med hakparenteser kan man framhäva stegen för att, med en "inskjuten etta", förenkla ett uttryck som $\cdot\,16/24$. (Att ett uttryck på formen '$/\,8\cdot 8$' fungerar som $\cdot\,1$ lär sig eleverna lätt med lämpliga laborationer och övningar.) Vi får att $\cdot\,16/24 = \cdot\,16\,[/\,8\cdot 8]/24 = [\cdot\,16/8]\,[\cdot\,8/24] = \cdot\,2/3$. Komposition, både av termer och av faktorer, härleds enligt metoder i CT. Det enklaste "objektet", att då testa en komposition mot, är motsvarande neutrala element. För faktorer väljer vi ett M-värde med mätetalet 1 (=enheten): $1\,\mathrm{m}\,[\cdot\,16/8] = [1\,\mathrm{m}\cdot 16]/8 = 16\,\mathrm{m}/8 = 2\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}\,[\cdot\,2]$.[32] Den första hakparentesen (d.v.s. innehållet i den) är här lika med den sista.[33] Ett särskilt förklaringsvärde har likheten $1\,\mathrm{m}\,[\cdot\,16/8] = 16\,\mathrm{m}/8$. H.L. kan illustreras laborativt, och är något elever som regel förstår. Kompositionen av faktorerna i V.L. kan (och bör) däremot inte greppas lika konkret. Eleverna blir märkbart förtjusta över att förstå det här sambandet. Att elever inte förstår sådan här komposition ger allmänna problem med matematiken. Här får vi också öppningen till att förstå 'decimalformen' av bråk: Efter att, *per definition*, ha slagit fast att ett bråk som $^3\!/\!_4$ står för operationerna $\cdot\,3/4$, så kan man studera hur en bråkberäkning kan utföras i olika ordning:

1. Täljaren först:	$20\,\mathrm{L}\cdot {}^3\!/\!_4 = 20\,\mathrm{L}\,[\cdot\,3/4] = [20\,\mathrm{L}\cdot 3]/4$	$= 60\,\mathrm{L}/4$	$= 15\,\mathrm{L}$
2. Nämnaren först:	$20\,\mathrm{L}\cdot {}^3\!/\!_4 = 20\,\mathrm{L}\,[\cdot\,3/4] = [20\,\mathrm{L}/4]\cdot 3$	$= 5\,\mathrm{L}\cdot 3$	$= 15\,\mathrm{L}$
3. Komposition först:	$20\,\mathrm{L}\cdot {}^3\!/\!_4 = 20\,\mathrm{L}\,[\cdot\,3/4]$	$= 20\,\mathrm{L}\cdot 0.75$	$= 15\,\mathrm{L}$

Både värdet 0.75 och att man ska multiplicera med det, framgår av: $1\,\mathrm{L}\,[\cdot\,3/4] = 0.75\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{L}\cdot 0.75$. Av detta följer också att tecknet för $^3\!/\!_4$ ska vara ett multiplikationstecken, eftersom $^3\!/\!_4$ står för ett "tal", som ju är 0.75 om vi väljer decimalform. De har samma tecken! – Allt kan förklaras i minsta detalj.

De här omvandlingarna kastar också lite ljus över olika modeller för bråk.

Bråkmodeller

Den s.k. **operatormodellen** uppfattar bråket $^3\!/\!_4$ som operationerna $\cdot\,3$ och $/\,4$, men i andra modeller illustreras bråken som delar av areor, längder m.m. som allesammans är storhetsvärden. De kan ses som "**storleksmodeller**". Med operatormodellen hanteras (som

[31] Det enda frågetecknet uppstår för vissa användningar av bågparenteser. Lösningen blir, som traditionen bjuder, att införa ett nytt begrepp – f.ö. inspirerat av syntaxen för programspråket C++. Men det faller utanför ämnet för den här artikeln.

[32] Ett litet observandum: Det är inte *enhetsbeteckningen* som blir multiplicerad av mätetalet, utan ***enheten***, som är det speciella **storhetsvärde som har mätetalet 1**. Som vanligt uppstår, även i det här sammanhanget, språkliga förenklingar, som till sist skymmer de bakomliggande idéerna. Vi får ett perpetuum mobile av: "det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta". (Se även nästa not.)

[33] Att $2\,\mathrm{m} = [1\,\mathrm{m}]\cdot 2$ är inte en *aktiv* kunskap hos flertalet elever. Att se mätetalet som en faktor ger dem aha-upplevelser.

visats ovan) bråket som en faktor, ett S-X värde. För de andra hanteras bråket som ett storhetsvärde – ett M-värde – där bråket är ett integrerat mätetal. Detta framgår av att $\frac{3}{4}\,\mathrm{dm} = 1\,\mathrm{dm}\cdot\frac{3}{4}$, där '$\frac{3}{4}$' tydligen är ett S-värde, som har "gömt sig" i ett M-värde, alldeles som skalära mätetal brukar göra. Uppfattningen, att operatormodellen "avviker" från de övriga modellerna och att den därför är "problematisk", närs på vissa håll. Det får nog mera ses som en missuppfattning. (En av flera, i det sammanhanget.)

Kompositionen av faktorer

Ett uttryck som $5 \cdot \frac{3}{4}/10 \cdot \frac{8}{3}$ kan skrivas om på en enkel rad till $1 \cdot 5 \cdot 3/4/10 \cdot 8/3$. Här får varje värde sin operationella *verkan på uttrycket i sin helhet* angiven av sitt inledande tecken.[34] (I exemplet har en inledande neutral faktor lagts till.) Man kan säga att varje S-värde har en viss **roll** i uttrycket.[35] Det här är helt analogt med det tidigare uttrycket med enbart termer. Att flytta termer (jämte sina tecken) är tämligen trivialt. Värre är det att omforma uttryck med faktorer, eftersom de inte konsekvent skrivs på en enda rad. Men idén om *roller* underlättar det hela. När man vill omforma ett uttryck (vilket blir nödvändigt i algebran) gäller att …

värdenas roller[36] ska bevaras vid omskrivningen.

Det som kan skapa frågetecken, om vilken roll ett tal har, är användningen av kvoter / bråk. Den regel eleverna lätt kan finna är att **alla skalärer i nämnaren får *omvända* tecken** och de i täljaren behåller sina tecken. (Inledande skalärer i täljare respektive nämnare betraktas som profaktorer med gångertecken.) När eleverna fått kläm på detta, blir det bara en rolig lek att skriva om och "förkrångliga" uttryck.

Gruppverkan i skolmatematiken

Ett viktigt begrepp i högre matematik är **gruppverkan**. Det beskrevs tidigare, i samband med att klassen "lägen" (LK) togs upp. Vi har sett ett exempel på det tidigare i texten: att skalärer (SK) förändrar kvantiteter (MK). Vi kunde också se att M-värden "tar upp" sitt värde från ett S-värde, ett mätetal. *Samma förhållande* har vi mellan L-värden och M-värden. Ett klockslag, t.ex. kl 7 är ett lägestal (LK), som har "fått" sitt värde av den mängd timmar som har adderats till en "nollpunkt" (=midnatt) för att uppnå klockslaget. Det kan illustreras som $\mathrm{kl}\,0 + 7\,\mathrm{h} = \mathrm{kl}\,7$. Det är även möjligt att göra beräkningar som: $\mathrm{kl}\,14 + 3\,\mathrm{h} = \mathrm{kl}\,17$ och $\mathrm{kl}\,5 - 3\,\mathrm{h} = \mathrm{kl}\,2$. Däremot är $\mathrm{kl}\,2 + \mathrm{kl}\,3$ en omöjlig konstruktion – det saknar mening.[37] Samma slags samspel mellan L- och M-värden har man för begreppsparen temperaturer/temperaturändringar; nivå (över referensyta)/längd; datum/dagar; ko-

[34] I enkla produkter mellan två tal, är det *möjligt* att uppfatta det första talet som det "aktiva" (= en multiplikator), och det andra som en passiv måltavla (multiplikand). Synsättet har ett språkligt stöd och multiplikationstecknet står *efter* talet som fungerar som skalär. I produkter med *flera* tal (särskilt om divisioner ingår) blir det bara möjligt att se multiplikationstecknet som stående *framför* sitt tal (= multiplikatorn). (I engelskan finns begreppen 'premultiply' och 'postmultiply'.)

[35] När rutinerade matematiker förenklar det första uttrycket i huvudet, så använder de sig av detta synsätt.

[36] Gäller roller som pro- eller antifaktor. Dessa begrepp infördes i en tidigare not.

[37] Här kan man reflektera över vikten att aktivt använda enheter i matematiken – att bara räkna med "tal" skapar ingen förståelse för alla de begränsningar verkligheten sätter för beräkningarna.

ordinater/riktade sträckor; m.m. För alla sådana par av värden ur olika objektklasser gäller att den ena typen av objekt "passivt" ändras av den andra sortens objekt – LK av MK; MK av SK. Vi har en äldre terminologi för paret med MK och SK: vi talar om multiplikand/multiplikator eller dividend/divisor. Eftersom vi har flera räknesätt och därmed flera slags relationer med gruppverkan, blir det opraktiskt att på det här sättet bilda specialtermer för varje räknesätt. Samtidigt *behöver* vi en terminologi, men som är enklare och mer anpassad för skolbruk, än högskolans terminologi för gruppverkan. Jag föreslår att vi kallar de "aktiva" elementen för **agenter** (=de som agerar) och den passiva komponenten för **ankare**. Man får alltid relationen, att en eller *flera* agenter verkar på *ett* ankare. Ankaret är "navet" som agenterna samlas runt – de är "förankrade" i ankaret, som därför lämpligen skrivs som ett inledande element, följt av sina agenter.

Det här ger oss **en inbördes struktur för klasserna** av objekt:

- ⋆ L-ankare förändras av M-agenter. M-ankare förändras av S-agenter.
  (CT: pilar i en kategori kan utgöra objekt i en annan kategori.)
- ⋆ Agenter *komponeras* med varandra.
  (CT: pilar komponeras.)
- ⋆ När vi jämför, kan det alltid göras på (minst) två sätt:
  1. Vi jämför två ankare med hjälp av motsvarande agenter.
  2. Vi jämför två agenter med hjälp av en tredje agent.

  (CT: olika pilar mellan objekten visar olika sätt att jämföra.)

L-värden är alltid enbart ankare och kan *bara* jämföras med hjälp av motsvarande agenter. Så när vi jämför kl 17 med kl 13, så är vi hänvisade till att använda de ändringar (agenter), som skapat dessa klockslag, nämligen $+\,17\,\mathrm{h}$ och $+\,13\,\mathrm{h}$. Vi får beräkningen kl 17 ※ kl 13 = $+\,17\,\mathrm{h} \,\backsim\!+\,13\,\mathrm{h} = +\,17\,\mathrm{h} - 13\,\mathrm{h} = +\,4\,\mathrm{h}$ d.v.s. 4 h *mer / senare*. Vi får här en "differens", men det är inte mellan klockslag! Samma gäller temperaturer, datum m.fl. L-X värden – det är inte sådana vi bildar differenser mellan, utan motsvarande M-värden.[38] Här är ett exempel för temperaturskillnad: $-10\,°\mathrm{C}$ ※ $-7\,°\mathrm{C} = -\,10\,° \backsim\!-\,7\,° = -\,10\,° + 7\,° = -\,3\,°$ d.v.s. 3 ° *mindre / lägre*. För ändringarna anges här inte °'C' då de inte är temperaturer.[39]

Den **fjärde objektsklassen** (talanvändningen) finner vi med frågan: om nu ett S-värde tilldelas rollen att vara ett S-ankare – vad har det då för agenter? Svaret är: det är exponenter! En direkt följd blir att faktorer (SK) kan jämföras med hjälp av exponenter. Detta används i olika förklädnader – som pH-värden och som decibelvärden, för att ta två exempel. Jag betecknar objektklassen med PK (potens).

[38] Talar vi inte om för eleverna hur det här fungerar, så känner de flesta instinktivt att något "inte stämmer". De upplever inte att de förstår. När man inte förstår blir det tråkigt. Elever som tycker matte är tråkigt blir inga ingenjörer (oavsett vilket betyg de förmått skaffa sig). Det blir tungt att lära sig alla trix och regler.

[39] Den här distinktionen görs inte i läromedel. Man kan dessvärre se temperaturer både adderas och multipliceras. Det gör inte eleverna klokare.

En bild av “atomära” problemtyper

Som avslutning kan det konstateras att formeln $V \xleftarrow{\tilde{A}} R$ lika gärna kan vändas: $R \xrightarrow{\tilde{A}} V$. Den första varianten har fördelen att man *säger jämförelsen* i samma ordning som man skriver den. Den sista kan framhålla en annan sida av saken: Att varje (“atomär”) delberäkning i ett problem har de här tre komponenterna, varvid två är kända och den tredje ska beräknas. Det här ger oss en modell med **tre problemtyper**:

Vad som beräknas	Diagram	Modifiering	Beräkning
V beräkna värde	$R \xrightarrow{\tilde{A}} ?$		$R\ \tilde{A}$
R beräkna rot	$? \xrightarrow{\tilde{A}} V$	$? \xleftarrow{\backsim\tilde{A}} V$	$V \backsim\tilde{A}$
$\tilde{A}$ jämförelse	$R \xrightarrow{?} V$	$\xrightarrow{\backsim R} \xrightarrow{V}$	$V \backsim R$[40]

De här tre grundproblemen kan underindelas i vardera **två varianter**:
a) alla komponenterna i $R\tilde{A}V$ är agenter (av typen MK eller SK) eller
b) R och V är ankare i relation till en agent $\tilde{A}$.
I det senare fallet kan vi beteckna kombinationerna enligt L/M, M/S och S/P.

Inalles har vi nu 6 klart beskrivna strukturer, som eleverna behöver förstå, jämte hur de appliceras på 4 väl identifierade typer av objekt (klasser/talanvändningar). Följande schema ger en överblick över fallen för olika objektsklasser. Jag ger också en bild av hur detta förmedlas i grundskolan, med beteckningarna: ‘x’ = exemplifieras (utan särskild analys); ‘B’ = beskrivs (på ett sätt som ger viss förståelse i sin kontext); ‘OK’ = Acceptabelt beskrivet (men kontextberoende).[41]

	ankare–agent			endast agenter		
Beräkna	L/M	M/S	S/P	M	S	P
V	x	OK	x	OK	(x)	(x)
R	x	B	(x)	B		
$\tilde{A}$	x	x		x		

Det som är satt inom parentes är sådant som aldrig identifieras som en fristående typ av beräkning. Beräkningen R:S/P beräknar den särskilda roten för en potens med exponenten 2. För beräkningen V:S gäller att karaktären av komposition aldrig uppmärksammas eller förstås. Beräkningar av typen V:P avser vissa logaritm- och potenslagar.
Det, som man “lyckas” beskriva något av, är de relationer som traditionellt uppmärksammats med terminologin “addend (summand), minuend, subtrahend, multiplikand, multiplikator, dividend, divisor”. (Och de termerna avskaffade vi i Sverige 1962.) Jag vill påminna om att jämförelserna $\tilde{A}$:L/M och $\tilde{A}$:M/S beräknas genom att jämföra de agenter, som “skapat” ankarena utifrån ett (godtyckligt) gemensamt ankarvärde. Lättast finner man agenterna utifrån ett *neutralt* gemensamt ankare.

> Allvarligt är att sambanden mellan “rutorna” i tabellen aldrig reds ut ordentligt – det saknas en användbar teori för det. Ej heller synliggörs L-värden som en särskild, begränsande talanvändning. I stället tvingas eleverna sätta sig in i ett otal “problemsituationer”,

[41] Indelningen grundas på mina intryck från många års erfarenheter av läromedel, didaktisk debatt och diverse forskningsrapporter. Den bygger inte på någon statistisk undersökning.

där förståelsen för en situation oftast inte bidrar till förståelsen av en annan. Det enda eleverna allmänt utvecklar "flyt" i, är V-beräkningar, där värden och operationer framgår av det givna problemet. En enkel R-beräkning blir problematisk för en stor del elever. Problem innehållande jämförelser är ett erkänt stort problem för elever. Det tycks det även vara för didaktiker: Man identifierar t.ex. problem som "jämförelseproblem" grundat på semantiken – inte på strukturen hos problemet. Om problemet är: "Anna har växt 5 cm och är nu 137 cm lång. Hur lång var Anna innan?" så identifieras detta helt riktigt som en R-beräkning. Om problemet i stället formuleras som: "Anna är 5 cm längre än tidigare och är nu 137 cm lång. Hur lång var Anna innan?" så uppfattas detta som ett "jämförelseproblem", eftersom man använt orden "längre än", som uttrycker jämförelse. Det är så här rörigt det kan bli, när man inte bygger *hela* undervisningen på teori. Den numeriskt inriktade teori vi grundar undervisningen på idag är besvärande begränsad. Den behöver varken ha några definitioner för "jämförelse" eller besväras av verklighetens enheter.

En sak som kan verka förvirrande för elever, om de inte har en klar bild av sammanhangen, är att kvoter och differenser används både för R- och $\tilde{A}$-beräkningar. (Uttrycken $V \backsim \tilde{A}$ och $V \backsim R$ i tabell ovan.) Divisionens och subtraktionens uppgift är då att *vända* en operation. Som regel klargörs varken vilken operation man "vänder", eller att det är *det* man gör.[42] Man får bara algoritmen för jämförelsen given.

Det finns mycket som är dysfunktionellt i matematikundervisningen. Med den här artikeln, så är det mitt hopp att jag väckt ditt hopp om att det finns en lösning på det hela.

Det som redovisats här är bara ett avstamp till allt som följer av att tillämpa Category Theory på aritmetiken. Mitt huvudsyfte har varit att visa hur man kan ta fram en begränsad, sammanhållen modell för strukturer i aritmetiken och att denna går att förstå fullt ut. Men där finns mer. – Tallinjen får en konsistent tolkning. "Teckenlagar" generaliseras till att gälla fler tecken än + och −, och blir trots det enklare. Potens- och logaritmlagar blir tämligen banala. Enhetsanvändningen kan integreras på ett konsistent vis. Proportionalitet antar hanterbara proportioner. Och mer därtill ...

Till sist några ord av Cullen Hightower:

The only new ideas that are not subject to our skepticism or suspicion are our own.

[42] I abstrakt algebra lyfter inversbegreppet fram det här, men man har ett mer abstrakt tänkande, där *element* i stället för operationer "vänds". I ett andra steg visar man sedan att division och subtraktion kan "skapa" de här inverserna – men det är en omväg. Det är enklare att vända operationer direkt.

Lokala Nyheter

Linköping

Doktorsavhandlingar

Hannes Frenander (beräkningsmatematik) *High-order finite difference approximations for hyperbolicproblems: multiple penalties and non-reflecting boundary conditions*

Evgeniy Lokharu *Small-amplitude steady water waves with vorticity*

Anna Orlof *Quantum scattering and interaction in graphene structures*

Venuste Nyagahakwa *Families of sets without the Baire property*

Célestin Kurujyibwami *Admissible transformations and the group classification of Schrödinger equations*

Innocent Ngaruye (mat. stat.) *Contributions to small area estimation: using random eects growth curve model*

Cristina La Cognata (beräkningsmatematik) *High order summation-by-parts based approximations for discontinuous and nonlinear problems*

Licentiatavhandlingar

Emanuel Evarest Sinkwembe (matematisk statistik) *Modelling weather dynamics for weather derivatives pricing*

Nyanställningar

Biressaw Wolde, Vincent Umutabazi (doktorander/forskarstuderande)

Avställningar

Stefan Rauch professor emeritus.

Lund

Nya disputationer

Andrei Stoica, 25 augusti, *Sharp Bounds for Calderón-Zygmund Operators in a Vector-Valued Setting.*

Johan Swärd, 15 september, *Parameter Estimation – In Sparsity We Trust.*

Ted Kronvall, 20 oktober, *Group-Sparse Regression With Applications in Spectral Analysis and Audio Signal Processing.*

Nya doktorander

Adem Limani, Maria Juhlin, Daniele Gerosa, Mats Bylund, Erik Gärtner, Julio Careaga

Nya postdoktorer

Evgeniy Lokharu, Oscar Marmon, Henning Petzka

Karlstad

Sonja-Konvalevskydagarna, 9-11 November 2017.
Mer information:
`https://www.kau.se/sonjakovalevsky2017`

Hedersdoktorer

Svante Silvén utsedd till hedersdoktor.
Mer information:
`https://www.kau.se/om-universitetet/om-karlstads-universitet/akademiska-hogtider/akademisk-hogtid/hedersdoktorer-0`

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)

SMS höstmöte, Umeå den 17 november

Redaktionsråd

Författare i detta nummer

Gert Almkvist: Pensionerad Lunda matematiker. Bosatt i Höör, där han bl.a.bedriver algebraisk meditation.

Joachim Toft: Vice-presidenti ISAAC sedan 2015. Elev till Anders Melin och doktor 1997. Verksam först vid BTH, sedan vid Linnéuniversitetet.

Leif Önneflod: Pensionerad innovatör och mångsysslare med ett brinnande intresse för elementär matematik undervisning.

Innehållsförteckning

Notiser